



Universidad
Carlos III de Madrid

Departamento de ingeniería mecánica

PROYECTO FIN DE CARRERA

ESTUDIO NUMÉRICO DEL COMPORTAMIENTO DE UNA FISURA DE FRENTE RECTO CONTENIDA EN UN EJE GIRATORIO

Autor: Miguel Domínguez Quintas

Tutor: Lourdes Rubio Ruiz de Aguirre

Leganés, 29 octubre de 2012

Título: ESTUDIO ESTATICO DE EJE FISURADO
Autor: Miguel Domínguez Quintas
Director: Lourdes Rubio Ruiz de Aguirre

EL TRIBUNAL

Presidente: _____

Vocal: _____

Secretario: _____

Realizado el acto de defensa y lectura del Proyecto Fin de Carrera el día __ de _____
de 20__ en Leganés, en la Escuela Politécnica Superior de la Universidad Carlos III de
Madrid, acuerda otorgarle la CALIFICACIÓN de

VOCAL

SECRETARIO

PRESIDENTE

Agradecimientos

En primer lugar, me gustaría darle las gracias a mi tutora Lourdes Rubio, por haberme ofrecido este proyecto con el que he podido afianzar mis conocimientos sobre Abaqus, a la vez que me ha ayudado en cada momento de la realización del proyecto ofreciéndome su tiempo y dedicación.

Por otra parte, también me gustaría dar las gracias a mi novia Clivia. Ella me ha apoyado y dado seguridad en mi mismo a lo largo de la carrera y más concretamente durante la realización del presente proyecto. Me gustaría también dar las gracias a mis compañeros de piso de Castelo, que han sabido ayudarme y tirar de mi para adelante en momentos difíciles.

Por ultimo me gustaría dar las gracias y dedicar por completo este proyecto a mis padres, que han sabido educarme en el esfuerzo y persistencia. Los últimos 2 años de carrera han sido muy difíciles sin mi padre, un pilar básico en mi vida, y, por eso, se lo dedico todo a él que sin duda alguna se lo merece más que nadie.

Nunca te olvidaré.

Resumen

La aparición de fisuras en los ejes que constituyen un mecanismo supone un grave problema para su integridad. Por ello, es importante poder anticiparse a la fractura de un eje, sustituyéndolo cuando se aprecien evidencias de que está fisurado.

En este proyecto se va a estudiar el comportamiento de un eje fisurado con fisura de frente recto para diferentes posiciones angulares de fisura. Para ello se ha utilizado el código comercial ABAQUS 6.10 de elementos finitos (MEF).

En el presente proyecto se planteará un modelo de eje giratorio, sobre el cual podremos modificar la posición angular y el tamaño de la fisura de frente recto para conseguir entender como es el comportamiento de apertura y cierre del eje.

Todos y cada uno de estos casos o variaciones propuestos se analizarán detalladamente a lo largo del proyecto.

.

Palabras clave: fisura de frente recto, Método de los Elementos Finitos (MEF)

Abstract

The apparition of cracks on shafts that forms part of a mechanism creates an important issue for its integrity.

For that reason, it's important to anticipate the shaft fracture, replacing it when we appreciate evidence of crack.

In this Project we are going to study the behavior of a cracked shaft with a straight crack with different angular positions. As the tool for this project, we will use the ABAQUS 6.10 finite elements method (FEM),

In this project we will begin proposing the rotative edge model on which we will be variating the crack lenght and the angular position of the crack. This will allow us to understand the behavior of our shaft.

The selected cases will be fully analyzed throughout the project.

Keywords: straight crack, finite elements method (FEM), rotative shafts

Índice general

Introducción, objetivos y estructura.	1
1.1 Introducción.....	2
1.2 Objetivos.....	3
1.3 Antecedentes.....	3
1.4 Estructura de la memoria.....	5
Mecánica de Fractura Elástico-Lineal y tipos de fisura.	6
2.1 Mecánica de Fractura Elástico-Lineal	7
2.2 Tipos de fisura:	9
Modelo de Elementos Finitos del eje fisurado.	14
3.1 Método de Elementos Finitos	15
3.2 Introducción al programa ABAQUS	16
3.3 Modelo de eje fisurado	19
Análisis de resultados	25
4.1 Introducción al análisis de resultados	26
4.2 Caso 1: Tamaño de fisura $\alpha=0,5$	28
4.3 Caso 2: Tamaño de fisura $\alpha=0,4$	31
4.4 Caso 3: Tamaño de fisura $\alpha=0,3$	33
4.5 Caso 4: Tamaño de fisura $\alpha=0,2$	35
4.6 Caso 5: Tamaño de fisura $\alpha=0,1$	37
4.7 Comparación de resultados.....	39

Conclusiones y trabajos futuros.....	42
5.1 Conclusiones.....	43
5.2 Trabajos futuros.....	43
Presupuesto y bibliografía	44
6.1 Presupuesto.....	45
6.2 Bibliografía.....	48

Índice de figuras

Figura 2.1	7
Figura 2.2	8
Figura 2.3.....	9
Figura 3.1	19
Figura 3.2	19
Figura 3.3.....	20
Figura 3.4.a	21
Figura 3.3.b.....	21
Figura 3.5	21
Figura 3.6	22
Figura 3.7	22
Figura 3.8.....	23
Figura 4.1	25
Figura 4.2	25
Figura 4.3	26
Figura 4.4	26
Figura 4.5	27
Figura 4.6	28
Figura 4.7.....	30
Figura 4.8.....	31
Figura 4.9.....	32
Figura 4.10.....	33
Figura 4.11.....	34
Figura 4.12.....	35
Figura 4.13.....	36
Figura 4.14.....	37

Índice de tablas y gráficas

Tabla 3.1	18
Tabla 6.1	43
Gráfica 2.1	10
Gráfica 2.2	11
Gráfica 2.3	12
Gráfica 2.4	12
Gráfica 4.1	38
Gráfica 4.2	39
Gráfica 4.3	40

Capítulo 1:

Introducción, objetivos y estructura.

1.1 Introducción

El elemento más importante de las máquinas rotativas, tales como compresores, turbinas de vapor o gas es el eje, árbol o rotor. Los fallos que más daños producen en este tipo de maquinaria suelen tener su origen en el fallo de los ejes. Estos fallos suelen estar provocados por la presencia de fisuras.

Como consecuencia de la fatiga de los esfuerzos cíclicos a los que están sometidos, aparecen fisuras en planos perpendiculares a la dirección de estos, lo que provoca el aumento de la flexibilidad del componente produciéndose cambios en el comportamiento estático y dinámico. Para predecir su presencia e identificar su posición y tamaño, se han desarrollado diferentes trabajos en los que se intenta relacionar el comportamiento mecánico de ejes fisurados y la presencia de fisuras.

Un eje fisurado puede seguir funcionando durante largos períodos de tiempo favoreciendo el crecimiento de las fisuras por fatiga, hasta alcanzar un tamaño crítico. Es entonces cuando se produce la rotura repentina o fallo por fractura del eje. Es muy importante detectar a tiempo fisuras en estos ejes rotativos antes de que se alcancen los tamaños críticos para prevenir así un fallo que suponga la pérdida de todo el conjunto.

Aun se sigue estudiando sobre el desarrollo de métodos de detección e identificación de fisuras o defectos en elementos mecánicos que no sean destructivos (líquidos penetrantes, ultrasonidos...) para salvar la integridad física del elemento.

Numerosos estudios afirman que la velocidad de propagación aumenta exponencialmente. Esto hace que sólo unos días más de operación (una vez detectada la fisura) sean suficientes para provocar un fallo catastrófico, perdiendo completamente la máquina y con riesgo muy alto para el personal y resto de equipos.

Cuando una fisura se detecta a tiempo, el rotor se puede sustituir en un plazo corto (días o semanas) suponiendo un coste económico asequible. Esta situación explica el creciente interés por el comportamiento de las fisuras y particularmente el de los ejes fisurados.

Resulta de gran interés destacar el aumento de programas informáticos destinados al diseño computacional, en concreto al método de elementos finitos, con los que se pueden realizar numerosos y difíciles cálculos evitando así los enormes costes necesarios para realizar prototipos reales y simularlos. Para ello, será necesario ajustar numerosos parámetros para hacer el modelo lo mas fiel posible a la realidad.

1.2 Objetivos

El principal objetivo del presente proyecto es determinar el comportamiento de un eje giratorio fisurado con una fisura de frente recto, situada en el punto medio de éste y sometido a una serie de cargas. Para ello se deben conseguir los siguientes subobjetivos:

- Proponer el modelo de elementos finitos del eje fisurado.
- Someterlo a diferentes cargas estáticas y crear diferentes casos mediante la variación angular de la fisura y el propio tamaño de ésta.
- Comparar y analizar todos los resultados obtenidos.

Con todo esto, se podrá conocer con exactitud cómo se comporta nuestro eje en concreto y así establecer un modelo que sirva de referencia para prever cuando un eje se encuentra fisurado.

1.3 Antecedentes

El fenómeno de fatiga fue descubierto a principios del siglo XIX con el avance de la maquinaria y los vehículos de transporte. Los primeros trabajos relacionados con la fatiga se atribuyen al ingeniero de minas alemán W. Albert¹, quien en 1829 realizó ensayos sometiendo a cargas y descargas sucesivas eslabones de cadenas de elevadores. No obstante, el término fatiga para denominar el fallo de materiales debido a cargas repetidas fue por Poncelet² en 1839.

En 1843, W.J.M. Rankine³ reconoció las características distintivas de la fractura por fatiga e hizo notar el peligro de los concentradores de tensión en los componentes de máquinas.

August Wöhler⁴ realizó los primeros estudios sistemáticos de flexión rotativa sobre ejes de ferrocarril. Observó que la resistencia de los ejes de acero sometidos a cargas cíclicas era apreciablemente menor que su resistencia estática. Su trabajo

permitió la caracterización del comportamiento a fatiga en base a las curvas de amplitud de tensiones frente a número de ciclos de carga hasta la rotura.

En 1874, el ingeniero alemán H. Gerber⁵ desarrolló métodos para el diseño a fatiga mediante cálculos de la vida a fatiga para diferentes niveles medios de la tensión cíclica. Goodman y Soderberg⁶ continuaron estudiando este fenómeno.

A principios de siglo Ewing y Humfrey⁷ (1903) utilizaron el microscopio óptico y observaron la formación de líneas y bandas de deslizamiento que generaban la formación de microgrietas en el material.

Durante la primera mitad del siglo XX se obtuvieron gran cantidad de datos experimentales relacionando la resistencia a fatiga con factores tales como la geometría y tamaño de las piezas, condiciones ambientales, acabado superficial, estructura metalográfica, etc. Las investigaciones en este periodo permitieron el desarrollo de los modelos de daño acumulado para predecir el fallo por fatiga. Con el desarrollo de la mecánica de la fractura elástica lineal (MFEL) se intentó caracterizar el crecimiento de las grietas de fatiga en términos del factor de intensidad de tensiones. La mayor aportación de la mecánica de la fractura elástica lineal es que el factor de intensidad de tensiones, determinado por las tensiones remotas aplicadas y las dimensiones geométricas del material, basta para caracterizar la propagación de la grieta.

Actualmente se siguen realizando investigaciones debidas a la disponibilidad de máquinas cada vez más complejas, de técnicas de medición y detección de grietas cada vez más pequeñas, la aplicación de la Mecánica de Fractura, tanto elástica lineal como elasto-plástica.

Es importante destacar la utilidad actual de los códigos comerciales actuales, con los que podemos realizar numerosas simulaciones sin recurrir a los costes que supondría realizarlo con modelos reales en bancos de pruebas.

1.4 Estructura de la memoria

El proyecto ha sido estructurado de la siguiente forma:

- Capítulo 1:
Este primer capítulo sirve de breve resumen para dar una idea global de los temas a tratar en este proyecto. En él se puede ver una breve introducción, los objetivos propuestos y un breve resumen sobre los estudios llevados a cabo a lo largo de la historia.
- Capítulo 2:
El segundo capítulo se expondrá un breve resumen de la teoría de Mecánica de Fractura Elástico-Lineal (MFEL). También se tratan los distintos tipos de fisura y los modelos de caracterización de su comportamiento (apertura o cierre).
- Capítulo 3:
En el capítulo tres se explica el Método de los Elementos Finitos (MEF) y se propone el modelo creado mediante el código comercial ABAQUS 6.10 de elementos finitos.
- Capítulo 4:
Este es el capítulo más importante, en el que se detallan los resultados del modelo elegido para posteriormente compararlos con casos teóricos.
- Capítulo 5:
A lo largo de este capítulo cinco se redactan una serie de conclusiones tras la finalización del presente estudio numérico. También se enumeran una serie de proyectos que podrían llevarse a cabo tomando de base el presente.
- Capítulo 6:
El capítulo seis lo constituyen dos apartados que serán los encargados de concluir la memoria: presupuesto del proyecto y la bibliografía utilizada.

Capítulo 2:

**Mecánica de Fractura Elástico-
Lineal y tipos de fisura.**

2.1 Mecánica de Fractura Elástico-Lineal

2.1.1. Mecánica de Fractura Elástico-Lineal

El primer paso para la aplicación de la teoría de la mecánica de fractura para la caracterización del crecimiento de fisuras es el estudio del campo tensional y de las deformaciones en los puntos colindantes con el extremo de la fisura.

Los principios del MFEL relacionan las tensiones aplicadas al componente, forma y tamaño de la fisura y características del material con las tensiones generadas alrededor de la fisura.

Las hipótesis de Elasticidad son las utilizadas en la MFEL: “pequeños desplazamientos y linealidad entre tensiones y deformaciones”. La hipótesis principal de esta teoría es la homogeneidad del material. Así se asume que el tamaño de la fisura debe ser varios órdenes de magnitud superiores a la dimensión microestructural propia. Si no tenemos esta homogeneidad se aplican las teorías de la Mecánica de la Fractura Elasto-Plástica (MFEP).

Se distinguen tres modos básicos de movimientos relativos en una fisura, que dependen de la dirección de aplicación de la carga con respecto al plano de ésta, denominándose: modo I (debido a cargas de tracción), modo II y modo III (causado por cargas cortantes) representados en la figura 2.1.

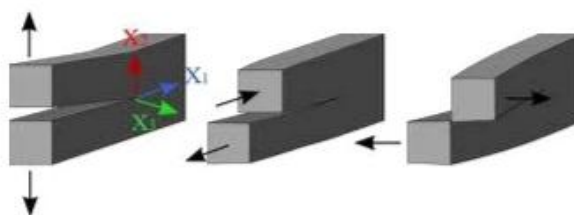


Figura 2.1 modos de fractura de izquierda a derecha: modo I, modo II y modo III

Los modos II y III son menos comunes, pero el modo I, debido a la tracción, es el que produce la gran mayoría de las roturas. Es también habitual que se presenten varios modos unidos en un mismo caso, ya que un eje puede estar sometido a diferentes casos.

2.1.2. Factor de Intensidad de Tensiones

El factor de intensidad de tensiones K_I define la magnitud de las tensiones locales en el fondo de la fisura. Depende del tipo de cargas, tamaño y forma de la fisura y de las condiciones de contorno geométrico. De forma general se suele expresar como:

$$K = f(g) * \sigma * \sqrt{\pi a}$$

Donde σ es la tensión aplicada al eje y $f(g)$ es un factor de corrección que depende de la geometría del componente y de la fisura.

2.2 Tipos de fisura:

Cuando en un eje giratorio aparece una fisura, es muy difícil predecir su forma. Por esto, necesitamos crear una aproximación lo mas real posible para simplificar sus ecuaciones de movimiento.

Así, diferenciaremos dos tipos de fisuras: fisuras de frente recto y fisuras de frente elíptico.

En este estudio se utilizarán fisuras rectas para simplificar el problema.

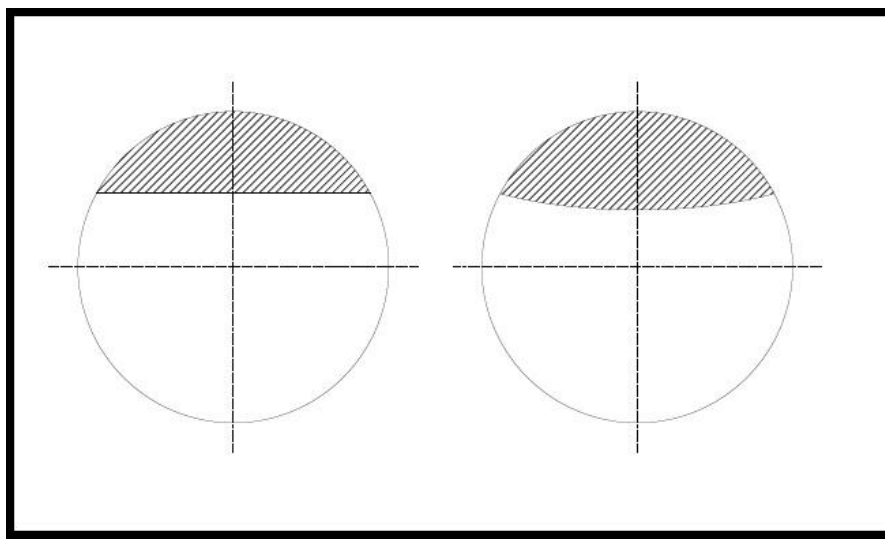


Figura 2.2 tipos de fisura: frente recto y elíptico

Para el estudio de un eje giratorio, uno de los factores mas importantes a tener en cuenta es la carga que genera el propio peso del eje influenciado por la gravedad. Así, según la orientación angular de la fisura se producirá la apertura y cierre de la misma como se aprecia en la figura 2.3

Esta orientación anteriormente comentada es dependiente del tiempo y cambia de forma periódica durante cada ciclo de rotación del eje. Este fenómeno transforma la rigidez del eje en función de la posición angular de la fisura. Podemos afirmar que la rigidez del eje fisurado será máxima cuando la fisura esté en posición cerrada. Esto ocurre en el instante de tiempo en el que la fisura se encuentra en la parte superior del eje, que como anteriormente se comentó, se mantiene cerrada debido al propio peso de nuestro eje y se comporta como si no existiese tal fisura.

El caso contrario se producirá en el instante en el cual la fisura se encuentra en la parte inferior del eje, donde la rigidez será mínima debido a que la fisura alcanza su máxima apertura. Esto se aprecia en la figura 2.3.

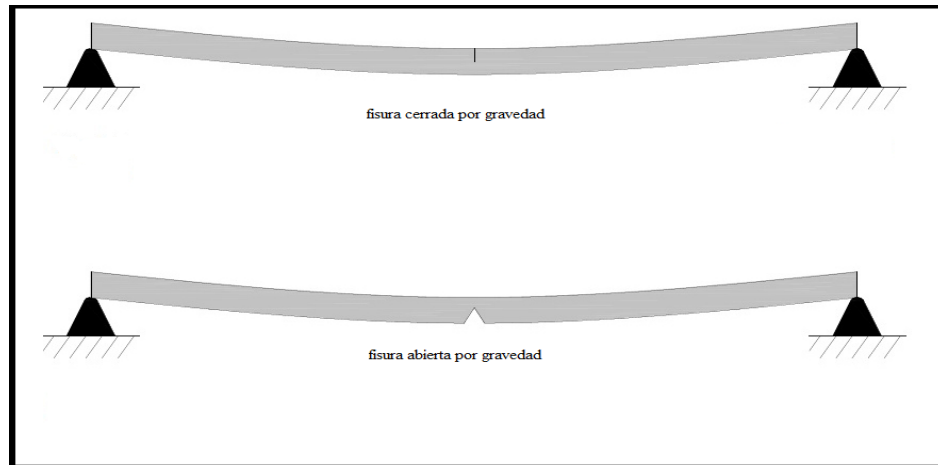


Figura 2.3 fisura abierta y cerrada según su posición

Este razonamiento solo es válido con condiciones estáticas, ya que una vez iniciada la rotación se presentarán más factores que provocarán alteraciones en la fisura en cada unidad de tiempo.

En relación a todo lo anteriormente comentado, se enumeran a continuación varios modelos de comportamiento de la fisura en función de la posición angular de nuestra fisura para cada instante de tiempo dado. Para ello, se supone que dicho comportamiento sólo depende del tiempo, y que el peso ejerce un efecto dominante.

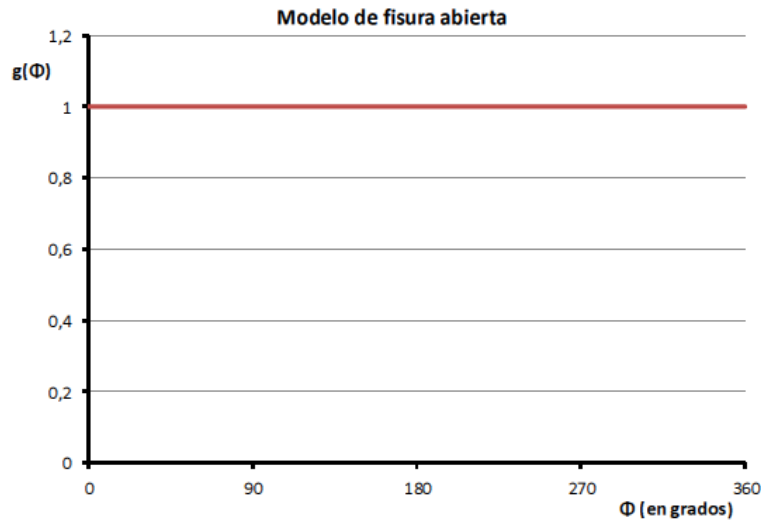
Se hace necesario por lo tanto establecer una función periódica en el tiempo que caracterice el comportamiento de la fisura, y que será representado por: $g(t) = g(\phi)$. Donde ϕ representa el ángulo descrito por la rotación del eje.

A continuación se muestran los 3 modelos de comportamiento de la fisura:

- Modelo de fisura abierta:

Es el modelo más sencillo, en el que el comportamiento de la fisura corresponde siempre a una fisura abierta. La función se muestra en la gráfica 2.1:

$$g(\Phi) = 1$$

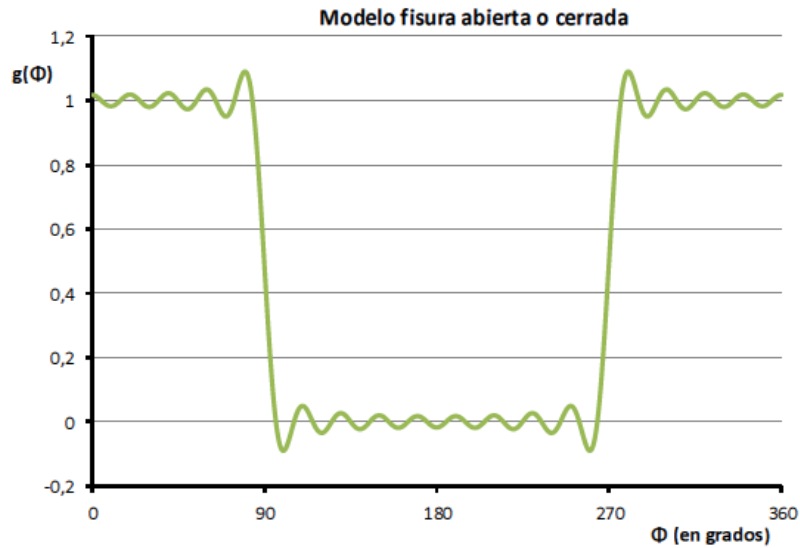


Gráfica 2.1 modelo fisura abierta

- Modelo de fisura abierta o cerrada:

Este modelo propuesto por Gasch⁸ se utiliza cuando la profundidad de la fisura no supera el 25% del diámetro del eje ($\alpha \leq 0,25$). Esta ecuación toma valores entre 0 y 1, donde en 0 la fisura estará cerrada y en 1 la fisura estará completamente abierta. En la gráfica 2.2 podemos ver con más exactitud el presente modelo.

$$g(\Phi) = \left(\frac{2}{\pi}\right) \left(\frac{\pi}{4} + \cos \Phi - \frac{1}{3} \cos 3\Phi + \frac{1}{5} \cos 5\Phi - \frac{1}{7} \cos 7\Phi + \frac{1}{9} \cos 9\Phi - \frac{1}{11} \cos 11\Phi + \frac{1}{13} \cos 13\Phi - \frac{1}{15} \cos 15\Phi + \frac{1}{17} \cos 17\Phi - \dots \right)$$

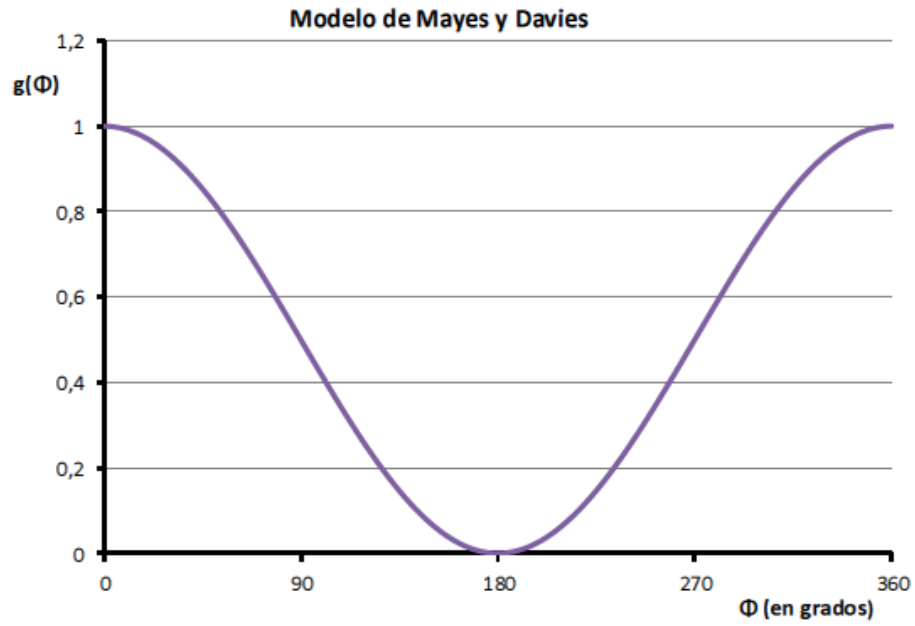


Gráfica 2.2 fisura abierta y cerrada

- Modelo de Mayes y Davies:

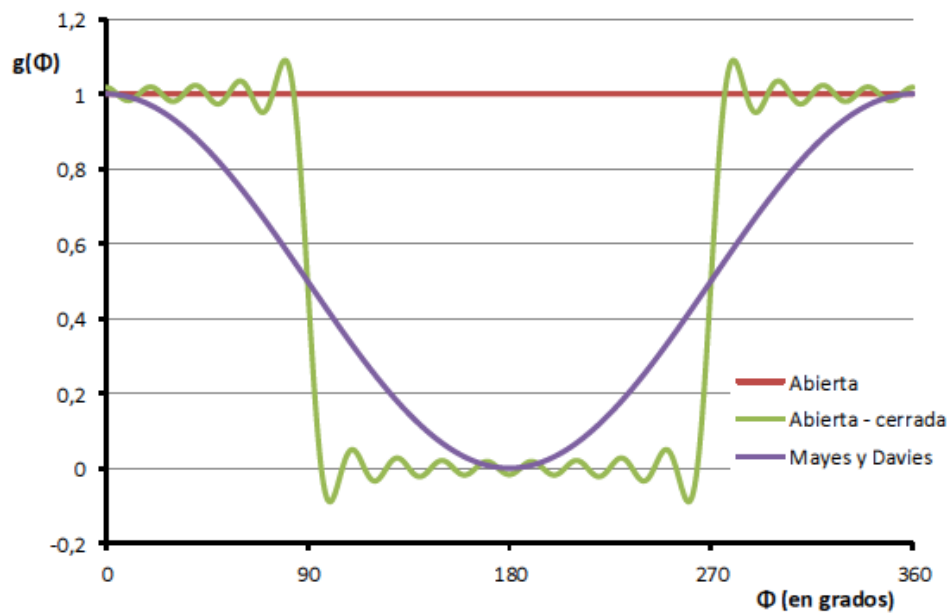
Mayes y Davies⁹ propusieron una función cosenoidal que representa muy bien el comportamiento de fisuras profundas ($\alpha \geq 0,25$). Con esta función se logra evitar el cambio brusco durante el proceso de apertura y cierre de la fisura, obteniendo una transición más delicada. Es lo más parecido a lo que ocurre en la realidad, sobre todo para fisuras profundas. Podemos observar este comportamiento en la gráfica 2.3. La función propuesta por Mayer y Davies⁹ se presenta a continuación:

$$g(\Phi) = \frac{1 + \cos \Phi}{2}$$



Gráfica 2.3 modelo de Mayes y Davies⁹

Finalmente, se representa en la gráfica 2.4 las tres funciones superpuestas, de forma que se pueda apreciar mejor el efecto y las diferencias de cada una de ellas.¹⁰



Gráfica 2.4 superposición de funciones anteriores

Capitulo 3:

Modelo de Elementos Finitos del eje fisurado.

3.1 Método de Elementos Finitos

El Método de los Elementos Finitos (MEF) es una de las herramientas más potentes utilizadas en la actualidad para resolver de forma numérica gran número de problemas de ingeniería. Este método se puede aplicar para la resolución numérica de una gran variedad de problemas como por ejemplo: análisis estructurales de elementos mecánicos, problemas de transferencia de calor, etc.

Mediante el MEF se realiza una aproximación para obtener la solución de problemas continuos, basada en transformar un cuerpo de naturaleza continua en un modelo discreto aproximado. A esta transformación se le denomina discretización del modelo.

El elemento de estudio se divide en un número finito de partes denominados elementos. A estos elementos se les asignan unas propiedades del material (densidad, modulo de Young, coeficiente de Poisson...). Estos elementos se dividen a su vez en puntos característicos denominados nodos.

El comportamiento en el interior de cada elemento queda definido a partir del comportamiento de los nodos mediante las “funciones de interpolación” o “funciones de forma”. Estas funciones definen de manera única el campo de desplazamientos dentro de cada elemento finito, expresado en términos de los desplazamientos nodales de dicho elemento. De este modo se consigue una aproximación de lo que le ocurre a nuestra pieza a partir del conocimiento de un número determinado y finito de puntos.

La relación entre estos elementos, insertando las condiciones de contorno (cargas y restricciones), da lugar a un sistema de ecuaciones cuya solución va a permitir obtener resultados que nos mostraran el comportamiento aproximado de la pieza a estudiar.

El MEF se divide en las siguientes tres etapas:

- Preproceso. creación del modelo para el cálculo. En esta etapa se realizan las operaciones de:
 - Dibujo de la geometría del modelo.
 - Selección de las propiedades de los materiales que componen la pieza.
 - Aplicación de cargas exteriores y condiciones de contorno.
 - Discretización del modelo en elementos finitos.
- Resolución. Etapa en la que se realizan todos los cálculos y se generan las soluciones. En ella se realizan las operaciones de:
 - Selección del tipo de cálculo a realizar.
 - Configuración de los parámetros de cálculo, intervalos de tiempo y número de iteraciones.
 - Transferencia de las cargas al modelo, generación de funciones de forma, ensamblaje de la matriz de rigidez, resolución de sistemas de ecuaciones y obtención de la solución.
- Postproceso. En esta etapa se crea la representación gráfica de los resultados.

3.2 Introducción al programa ABAQUS

ABAQUS es un código de análisis por el Método de los Elementos Finitos de propósito general, orientado a la resolución de problemas no lineales. Fue desarrollado hace más de 20 años por la empresa Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc. (HKS), y en la actualidad se utiliza para resolver grandes y complejos problemas de ingeniería.

ABAQUS puede ser utilizado para resolver problemas de resistencia de materiales, mecánica de fractura, ingeniería forense, procesos de conformado de metales, transferencia de calor, etc.

ABAQUS está estructurado en tres grandes bloques, en correspondencia con las tres etapas en que se divide un problema para ser analizado por el Método de Elementos Finitos (preproceso, resolución y postproceso).

ABAQUS se encuentra dividido en cuatro módulos:

- ABAQUS/Standard, para resolución de problemas de propósito general. Incluye todas las posibilidades de análisis excepto el análisis dinámico.
- ABAQUS/Explicit, para resolución de problemas de tipo dinámico. Es poderoso por su eficiencia computacional en grandes modelos, y también altamente efectivo para aplicaciones cuasi-estáticas.
- ABAQUS/CAE, módulo interactivo para la creación de modelos de elementos finitos. A través de este módulo se puede implementar un modelo de forma sencilla y rápida.
- ABAQUS/Viewer, módulo de visualización de soluciones. Muestra los resultados obtenidos una vez resuelto el problema.

Para resolver un problema mediante ABAQUS 6.10 se deben introducir los datos de entrada que necesita el programa. Esta etapa se corresponde con la etapa de preproceso del Método de los Elementos Finitos.

Los datos de entrada se introducen a través de un archivo de texto (input file) que contiene toda la información necesaria para realizar la simulación. Este archivo de texto, también denominado “archivo de entrada”, se puede crear de forma interactiva utilizando ABAQUS/CAE, que genera internamente el archivo de texto, o mediante un editor de texto, donde el archivo es escrito directamente por el usuario.

Los datos que se introducen en el archivo de entrada son de dos tipos, model data y history data. Los model data que se utilizan para definir el modelo de elementos finitos son:

- Geometría. La geometría es lo primero que se introduce y debe representar lo más fielmente posible el cuerpo real que se va a estudiar. ABAQUS permite realizar modelos de geometría muy compleja, gracias al módulo
- Material. El modelo que se va a implementar puede estar formando de varios materiales. Se deben definir las propiedades de los distintos materiales de los que está formado nuestro modelo, y se deben asociar a las partes de la geometría a las que correspondan.
- Partes y ensamblaje. La geometría del modelo se puede definir organizándola en partes, por lo tanto, hay que introducir en el archivo de entrada la relación que

existe entre esas partes, además de la posición relativa de unas respecto de las otras. Esto se lleva a cabo a través de un procedimiento conocido como ensamblaje.

- Condiciones iniciales. Se deben especificar las condiciones iniciales del modelo. En ocasiones, es necesario especificar condiciones iniciales distintas de cero para tensiones, temperaturas, velocidades, etc.
- Condiciones de contorno. El modelo puede estar sometido a ciertas imposiciones por parte de su entorno que deben ser especificadas en el archivo de entrada. Se pueden imponer restricciones del movimiento, valores de desplazamientos y rotaciones o condiciones de simetría.
- Interacciones. En ocasiones el modelo que se desea estudiar puede estar formado por varios cuerpos que en un momento dado sufren una interacción o un contacto. ABAQUS permite también realizar modelos ante este tipo de situaciones.
- Definiciones de amplitud. Ciertos estados de carga y condiciones de contorno pueden estar definidos en función del tiempo, por lo tanto se deben introducir los parámetros de las curvas que definen esos estados de cargas y condiciones de contorno.
- Propiedades del entorno. Se pueden definir las características del entorno, como puede ser la humedad, temperatura, presión, etc.
- Continuación de análisis. Consiste en introducir resultados de análisis previos para continuar buscando resultados con el nuevo modelo. Después de introducir el archivo de entrada en el programa, se procede a la resolución del modelo. Esta fase es interna y en ella ABAQUS no interacciona con el usuario. Una vez que ABAQUS ha resuelto el modelo, los resultados de la simulación ven a través del módulo de visualización, el cual, lee el archivo de datos de salida (output file), y es capaz de crear animaciones de la simulación, gráfico, tablas de resultados, etc.

La visualización de los resultados se corresponde con la etapa de postproceso del Método de Elementos Finitos¹¹.

3.3 Modelo de eje fisurado

El problema planteado se basa en el estudio del comportamiento de un eje giratorio fisurado de aluminio de frente recto. La fisura está situada en el punto medio del eje a estudiar ($L_f = L/2$).

Para ello se creará un eje cilíndrico de 900 mm de longitud y 20 mm de diámetro con una fisura de frente recto en su punto medio ($L_f = 450\text{mm}$).

Acto seguido se simulará la variación angular de dicha fisura modificando únicamente la dirección de aplicación de una carga de valor $P = 50\text{N}$ dirigida hacia el eje. Ver figuras 3.1 y 3.6.

Estas modificaciones se llevan a cabo mediante giros de 45° en sentido horario hasta completar las 8 posiciones (360° totales). Con esto se simula que el eje esta girando, modificando así la posición de la fisura de frente recto para diferentes instantes de tiempo.

Los datos del problema se presentan en la tabla 3.1.

MATERIAL	aluminio
L (longitud)	900 mm
E (modulo de Young)	72 GPa
ν (coeficiente de Poisson)	0,3
D (diámetro)	20 mm
ρ (densidad)	2800 Kg/m ³
P (carga)	50 N

Tabla 3.1. Datos del problema

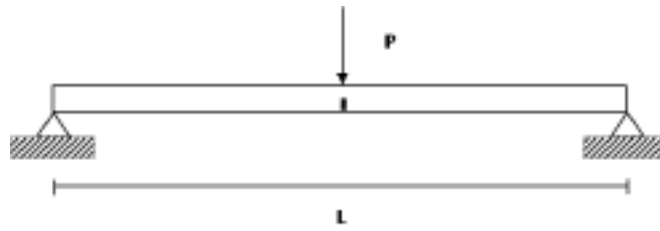


Figura 3.1 problema a resolver

Como se ha visto en el apartado 3.1 debemos crear un semieje en el módulo part de longitud $L= 450\text{mm}$ y diámetro $D=20\text{mm}$. Una vez definido éste, se creará una partición de tipo celda a lo largo de todo el semieje para modelar los diferentes tamaños de la fisura (ver figura 3.3), y con las cuales se facilitará un mallado más fino en las zonas de mayor interés.

El aspecto que presenta la barra con las particiones realizadas se muestra en la figura 3.2.

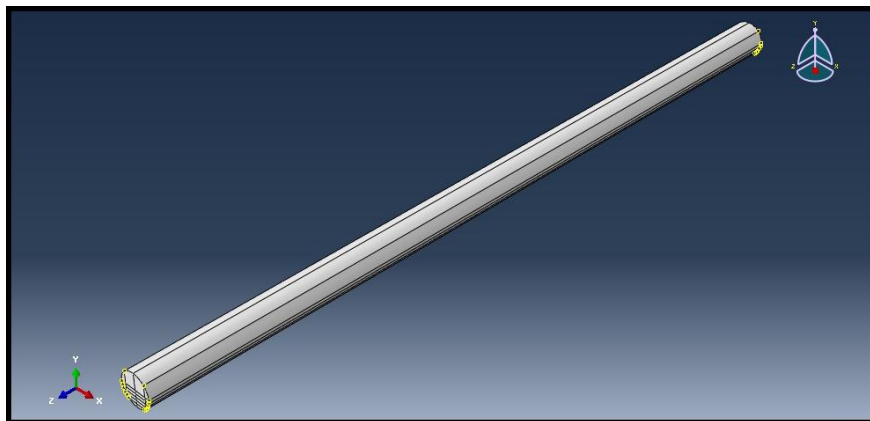


Figura 3.2 semieje realizado en la sección part

Dado que impondremos diferentes geometrías de fisura, se realizan particiones como se ha comentado en este mismo punto diferentes para cada valor del parámetro α (tamaño de fisura) ver figura 3.3. Donde $\alpha = a/D = 0.1; 0.2; 0.3; 0.4; 0.5$ y D es el diámetro del eje (20mm).

Antes de proceder con el ensamblaje del eje, es imprescindible entrar en el modulo property para poder otorgar al eje las propiedades descritas en la tabla 3.1.

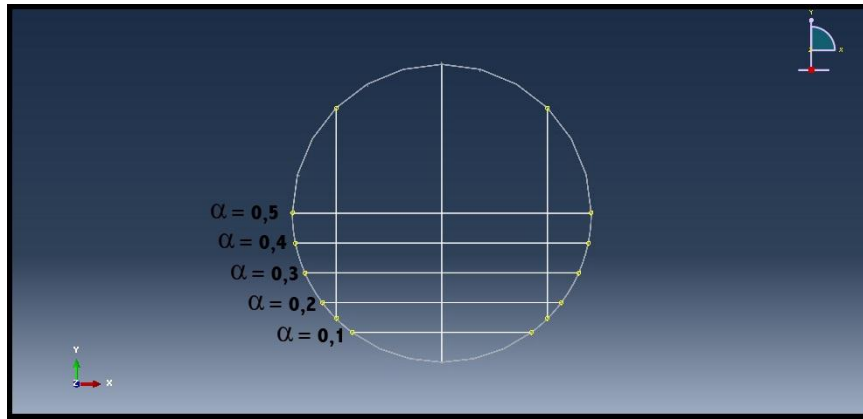


Figura 3.3 diferentes tamaños de fisura de frente recto

El siguiente paso será entrar en el modulo assembly donde se crearán y unirán los 2 semiejes, otorgándoles unas características a las uniones para definir los tipos de contactos entre las caras que contienen la fisura. Estas uniones se deben realizar en el modulo interaction.

Para elegir el tipo de contacto que más se asemeja a la realidad del presente problema, se ha utilizado el Proyecto de Fin de Carrera¹², en el que se comparan los diferentes tipos de contacto en las caras que componen la fisura. En este trabajo se llega a la siguiente conclusión: “sea cual sea el modelo de contacto que se elija, el Factor de Intensidad de Tensiones es independiente del contacto elegido”¹¹

Así, dentro de las posibilidades que el código comercial Abaqus nos presenta (Frictionless, penalty y Rough), se ha elegido el contacto tipo Frictionless, en el cual suponemos un deslizamiento libre en las superficies de contacto. Ver figura 3.4.a.

ABAQUS determinara un valor nulo de coeficiente de fricción ($\mu=0$).

Para la elección del contacto entre las caras abiertas, se ha utilizado un contacto tipo Surface to surface. Éste ultimo contacto se puede visualizar en la figura 3.4.b.

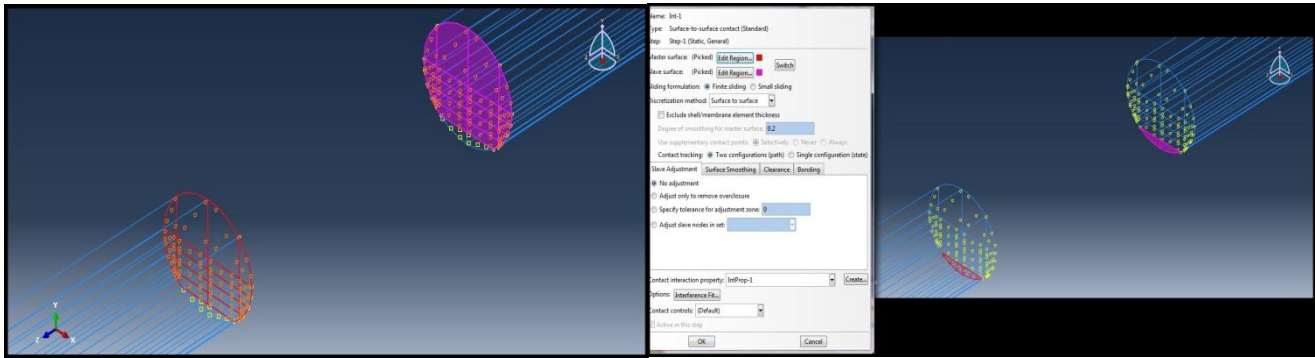


Figura 3.4.a unión tipo frictionless (izquierda) y figura 3.4.b unión tipo surface to surface (derecha).

Una vez se hallan completado todos los pasos anteriores, en el modulo assembly podremos visualizar el eje unido que se muestra en la figura 3.5.

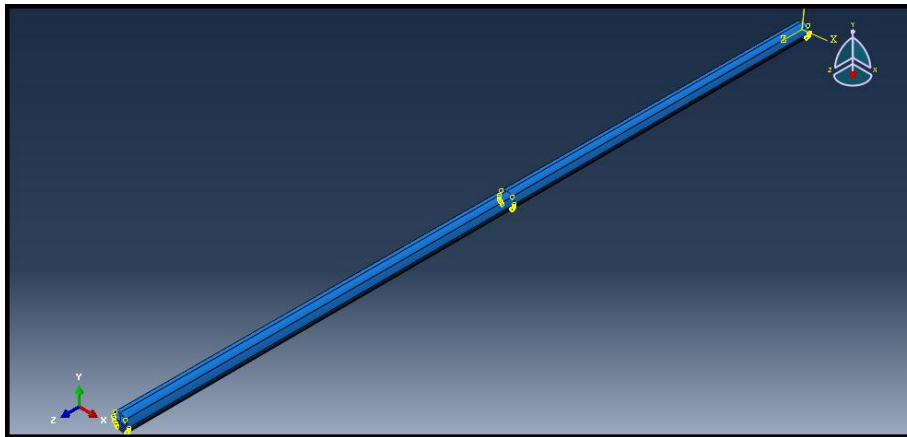


Figura 3.5 eje completamente unido

Para el resto de las barras el procedimiento sería análogo, seleccionando en cada caso el área de fisura correspondiente para cada tamaño de fisura (ver figura 3.3) a partir de las particiones definidas y sus respectivos contactos.

Una vez definida la fisura, el siguiente paso es aplicar las cargas y condiciones de apoyo. Se asumirá como carga una carga puntual de valor 50N, que ira girando su posición como se muestra en la figura 3.6 (ya explicado en el inicio de este mismo apartado 3.3).

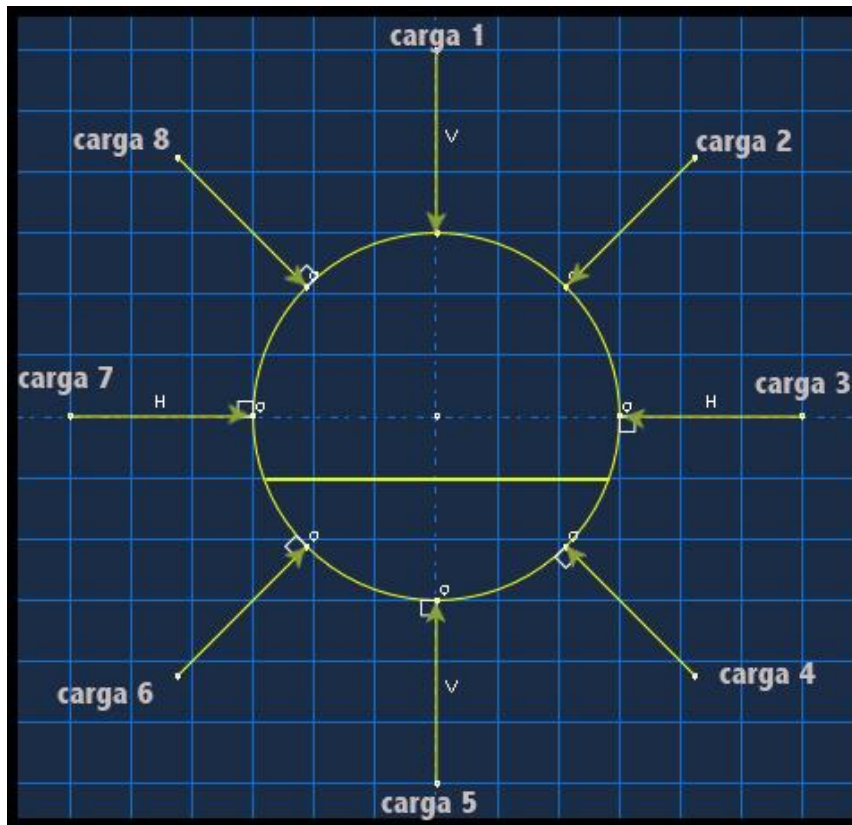


Figura 3.6 disposición de cargas

En lo concerniente a los apoyos, únicamente se consideran a lo largo de la semicircunferencia inferior de la sección de cada uno de los dos extremos de la barra como se aprecia en la figura 3.5. Tras varias pruebas para la elección del tipo de apoyo, finalmente se utilizó el tipo *ZASYMM* (*Antisymmetry about a plane with $Z = constant$* ($U1 = U2 = UR3 = 0$)) dado que con este tipo de restricción conseguíamos una deformada muy parecida a la realidad sin modificar las secciones de los extremos del eje.

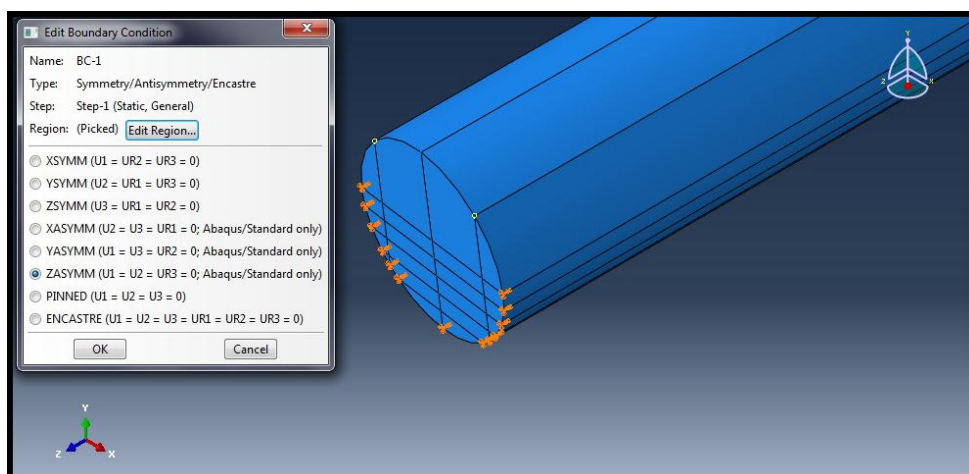


Figura 3.7 apoyos en los extremos del eje

Capítulo 3: Modelo de Elementos Finitos de eje fisurado

Finalmente, antes de comenzar la simulación del problema hay que proceder a realizar el mallado del modelo. Se han seleccionado elementos de tipo hexaédrico y se toma como criterio un total de 8 nodos por cada segmento con un tamaño de 1.3 mm para la zona mas refinada de la sección (semieje inferior).

El aspecto del modelo una vez mallado es el que aparece en la figura 3.8.

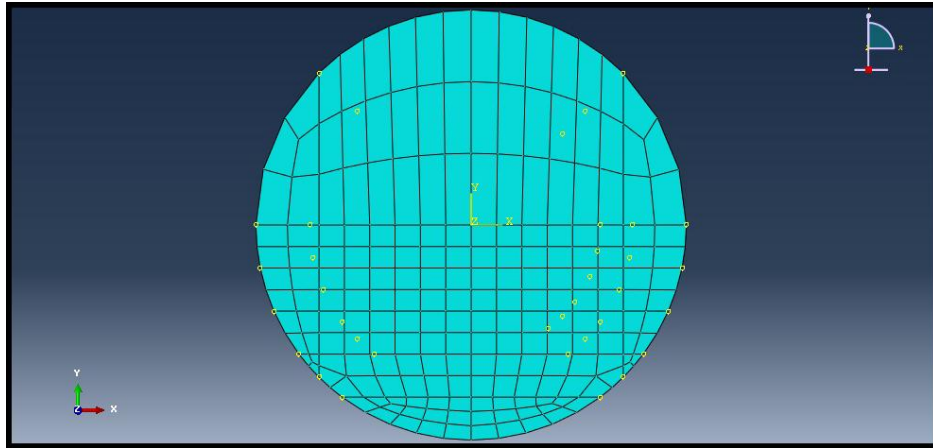


Figura 3.8 mallado del modelo.

Capitulo 4:

Análisis de resultados

4.1 Introducción al análisis de resultados

Se ha centrado el estudio en el análisis de las tensiones en la dirección del eje z, que corresponde al output S33 (ver figura 4.1) y en el análisis de la apertura de la fisura mediante el output COPEN, que permite visualizar los desplazamientos existentes entre cada par de nodos que conforman las caras abiertas de la fisura (ver figura 4.2).

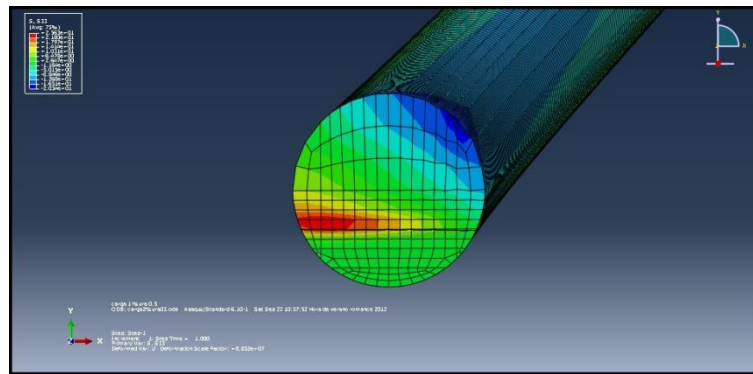


Figura 4.1 visualización tensiones en el eje z

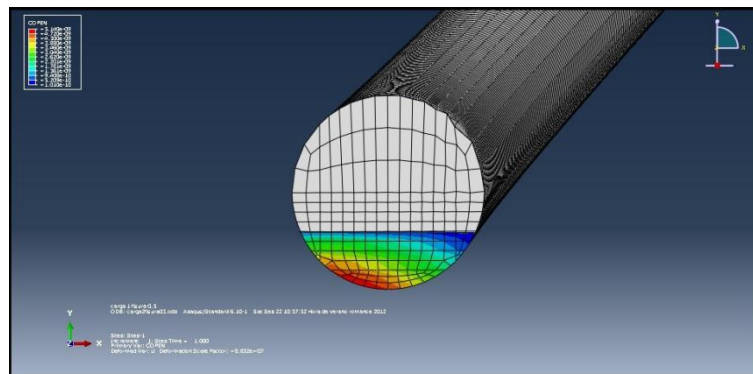


Figura 4.2 visualización de distancia entre nodos

Otros outputs de interés, pero menos relevantes para este trabajo son el “CPRESS” y “la deformada”.

En el primer output se observa la presión existente entre las caras de la fisura que, como se muestra en la figura 4.3 (caso en el cual la fisura esta abierta) nos dará, como es lógico, una presión nula.

La apertura se puede visualizar en la figura 4.4, donde aparece la deformada del eje.

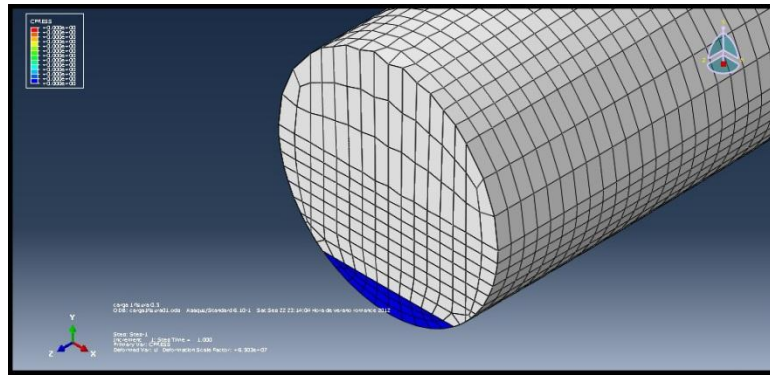


Figura 4.3 visualización de la presión de contacto nulo entre las caras de contacto de la fisura

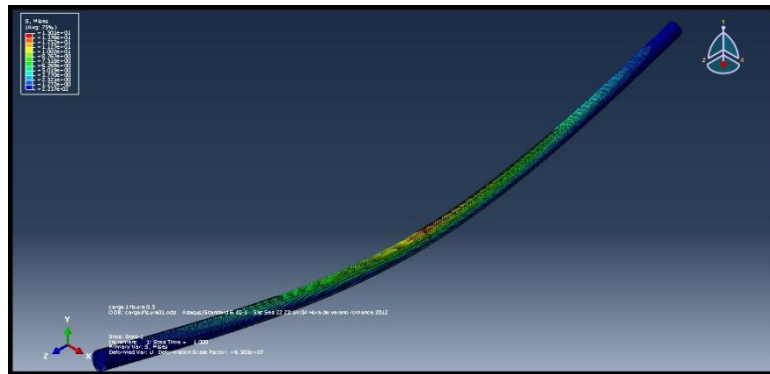


Figura 4.4 visualización de la deformada de tensiones de Von Mises

En los apartados 4.2, 4.3, 4.4, 4.5 y 4.6 se expondrán los resultados obtenidos para cada tamaño de fisura de los outputs COPEN y S33 como se mencionó anteriormente.

Los datos están organizados de ocho en ocho en función de cada una de las diferentes posiciones de la fisura como se ha visto en la figura 3.6.

4.2 Caso 1: Tamaño de fisura $\alpha=0,5$

En este apartado se muestran los resultados correspondientes a la apertura y cierre de la fisura mediante el output COPEN (figura 4.5) y los resultados correspondientes a tensiones en el eje Z mediante el output S33 (figura 4.6) para una fisura de tamaño $\alpha = 0,5$ con sus diferentes posiciones angulares.

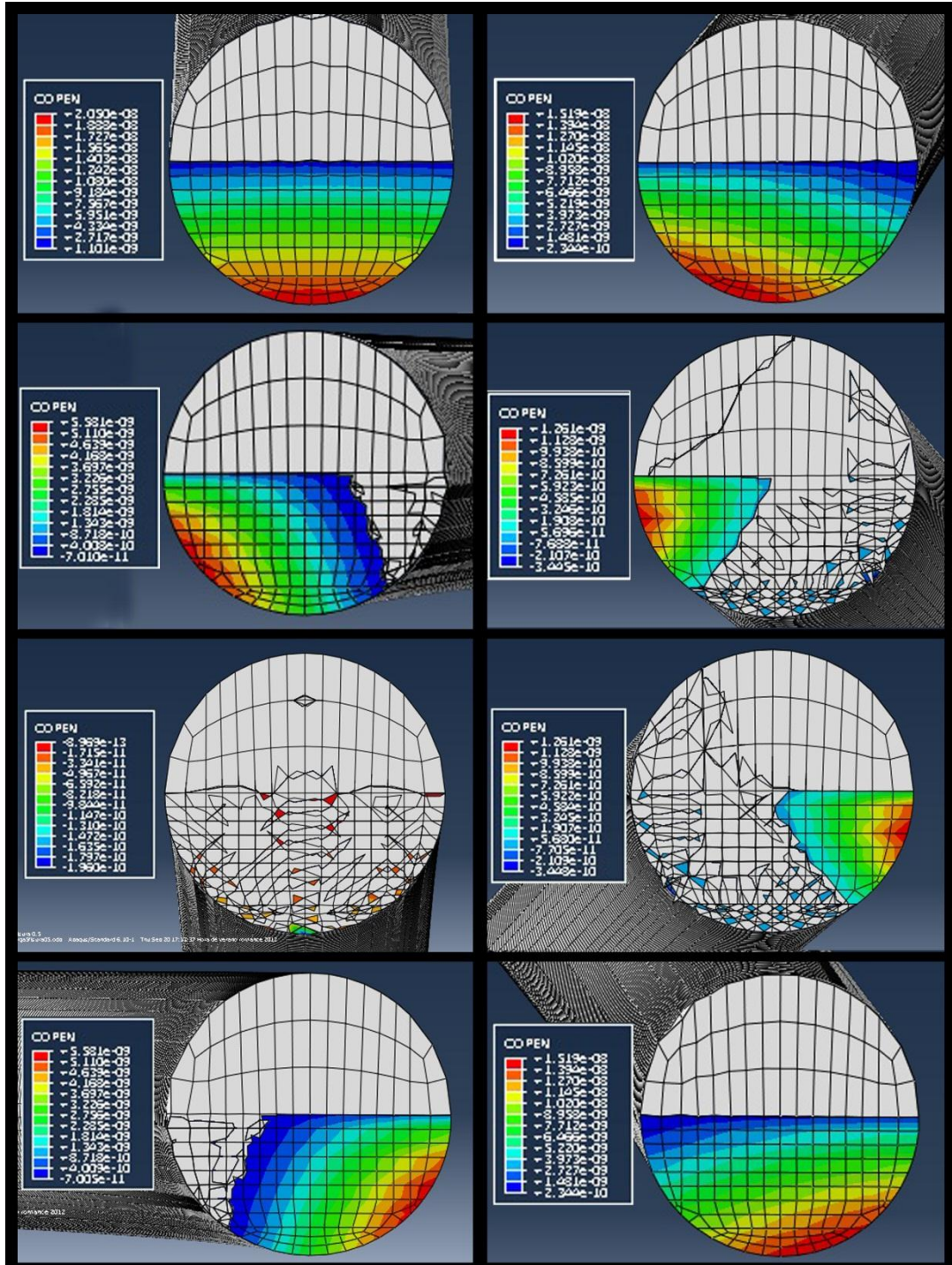


Figura 4.5 distancia entre nodos de ambas caras de la fisura

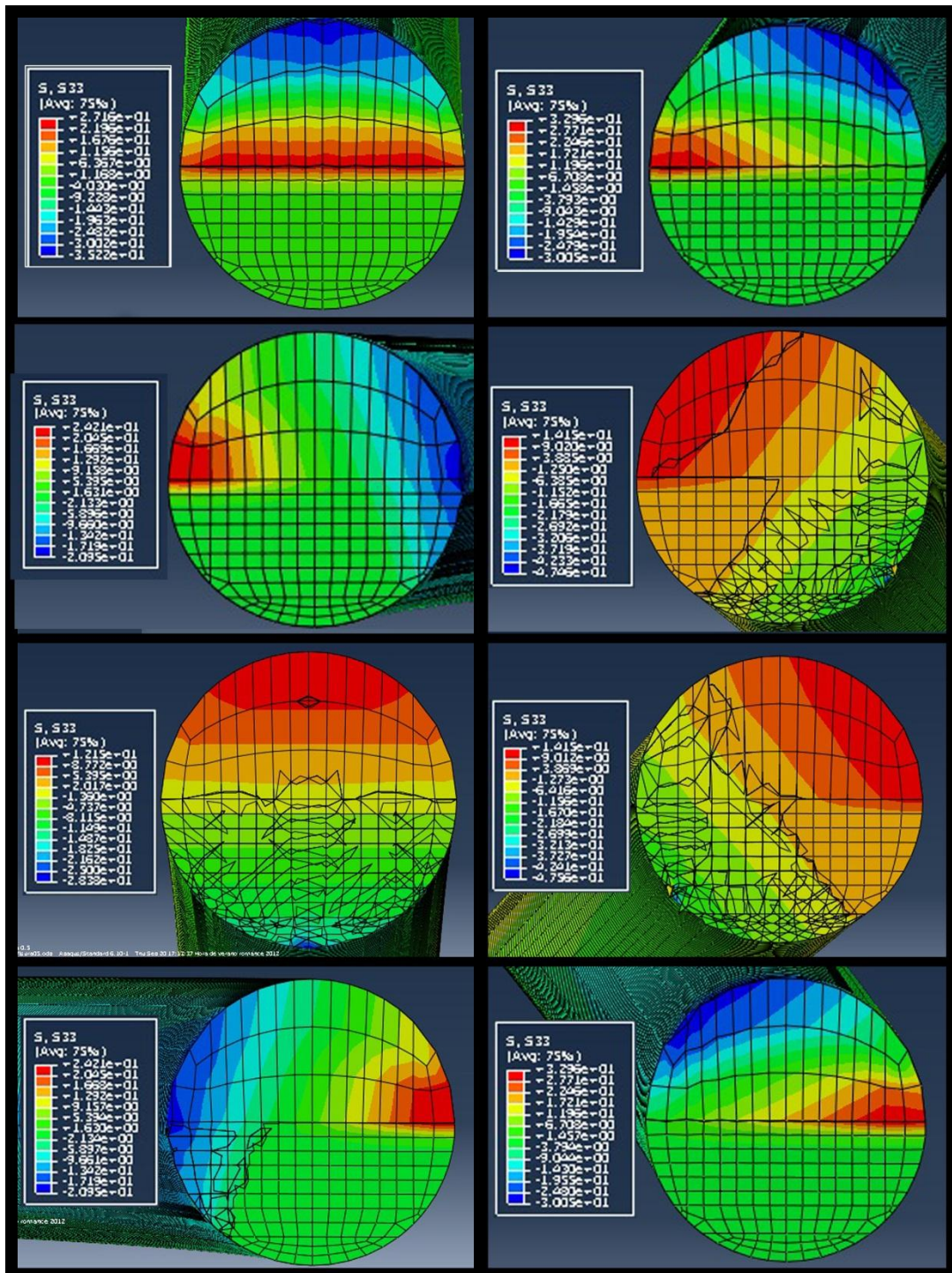


Figura 4.6 tensiones en el eje z (tracción: rojo y compresión: azul)

A la vista de los resultados de la figura 4.5 se puede observar cómo varía la apertura y cierre de la fisura. En la posición de carga 1 (carga en posición opuesta a la fisura) (ver figura 3.6) la fisura se encuentra completamente abierta como muestra el código de colores (el color azul simboliza las zonas mas cerradas mientras que el color rojo simboliza la zona mas abierta). La fisura se va cerrando paulatinamente hasta llegar a la posición de carga 5, donde se cierra completamente, debido a que en esta posición,

Capítulo 4: Análisis de resultados

la dirección de la carga se opone a la fisura. Vemos también como para las posiciones de cargas de 5 a 8 comienza a abrirse de forma casi simétrica a como se cerró.

Cabe destacar también, dentro del código de colores, el color gris, que simboliza el área que se mantiene completamente cerrada.

Observando la figura 4.6 se puede diferenciar entre tensiones de tracción (señalizadas mediante el color rojo y sus degradados adyacentes) y tensiones de compresión (señalizadas mediante el color azul y sus degradados adyacentes).

Con los demás colores, lo que se aprecia es el paso del rojo al azul, es decir, de tracción a compresión en nuestro eje. Cabe destacar también el color verde uniforme sin degradado. Éste representa la sección abierta de la fisura, que obviamente esta sin tensión.

Para los datos tomados del output S33 obtenidos, igual que en el caso de los datos extraídos del output COPEN, existe cierta simetría entre valores de tensión, ya sea compresión o tracción, y las áreas afectadas por estas tensiones para las cargas simétricas respecto del eje vertical Y (cargas 2 y 8; 3 y 7; 4 y 6). Esto aparecerá para cualquier tamaño de fisura dado. Ver figura 3.6.

4.3 Caso 2: Tamaño de fisura $\alpha=0,4$

En este apartado se muestran los resultados correspondientes a la apertura y cierre de la fisura mediante el output COPEN (figura 4.7) y los resultados correspondientes a tensiones en el eje Z mediante el output S33 (figura 4.8) para una fisura de tamaño $\alpha = 0,4$ con sus diferentes posiciones angulares.

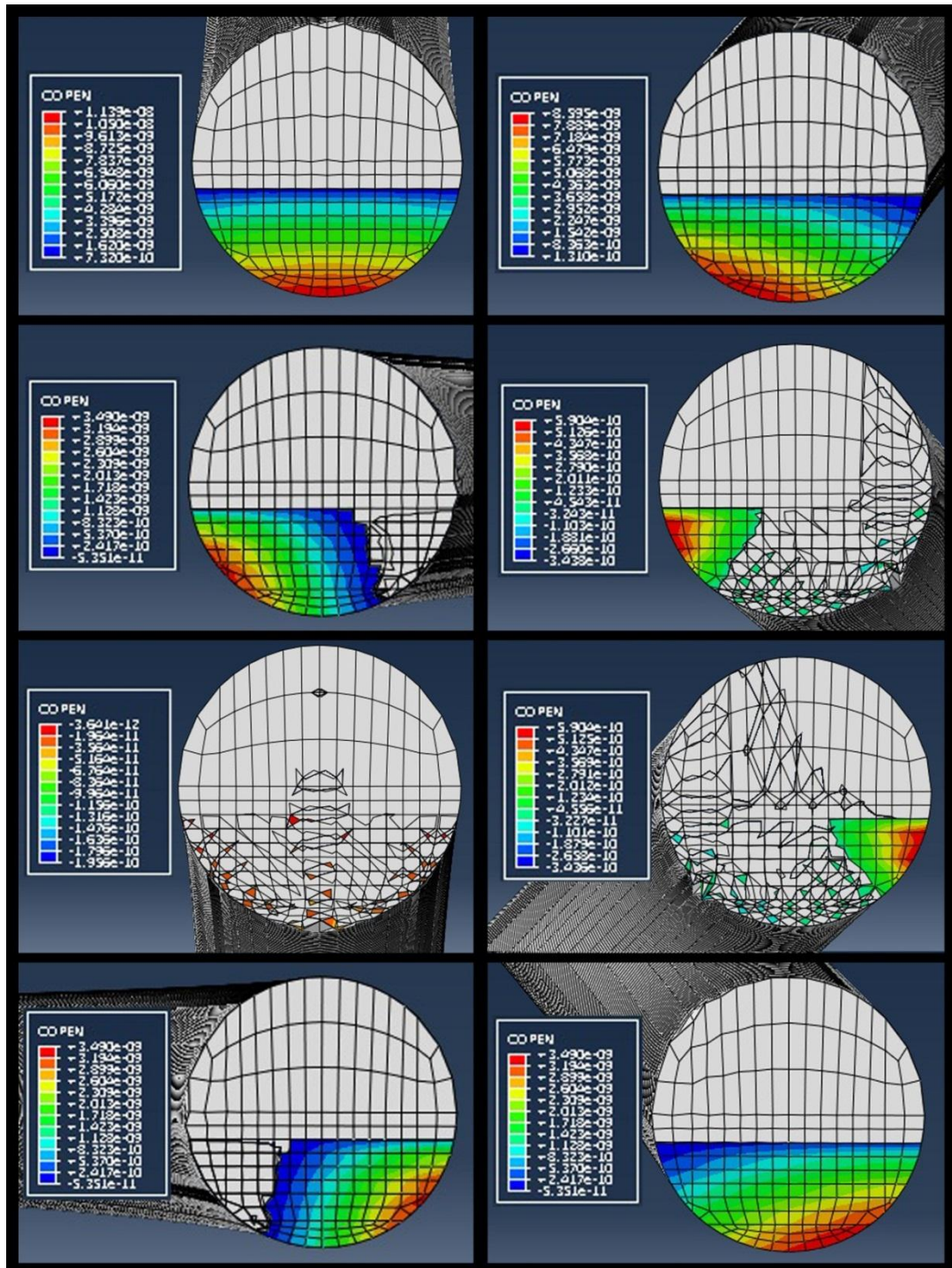


Figura 4.7 distancia entre nodos de ambas caras de la fisura

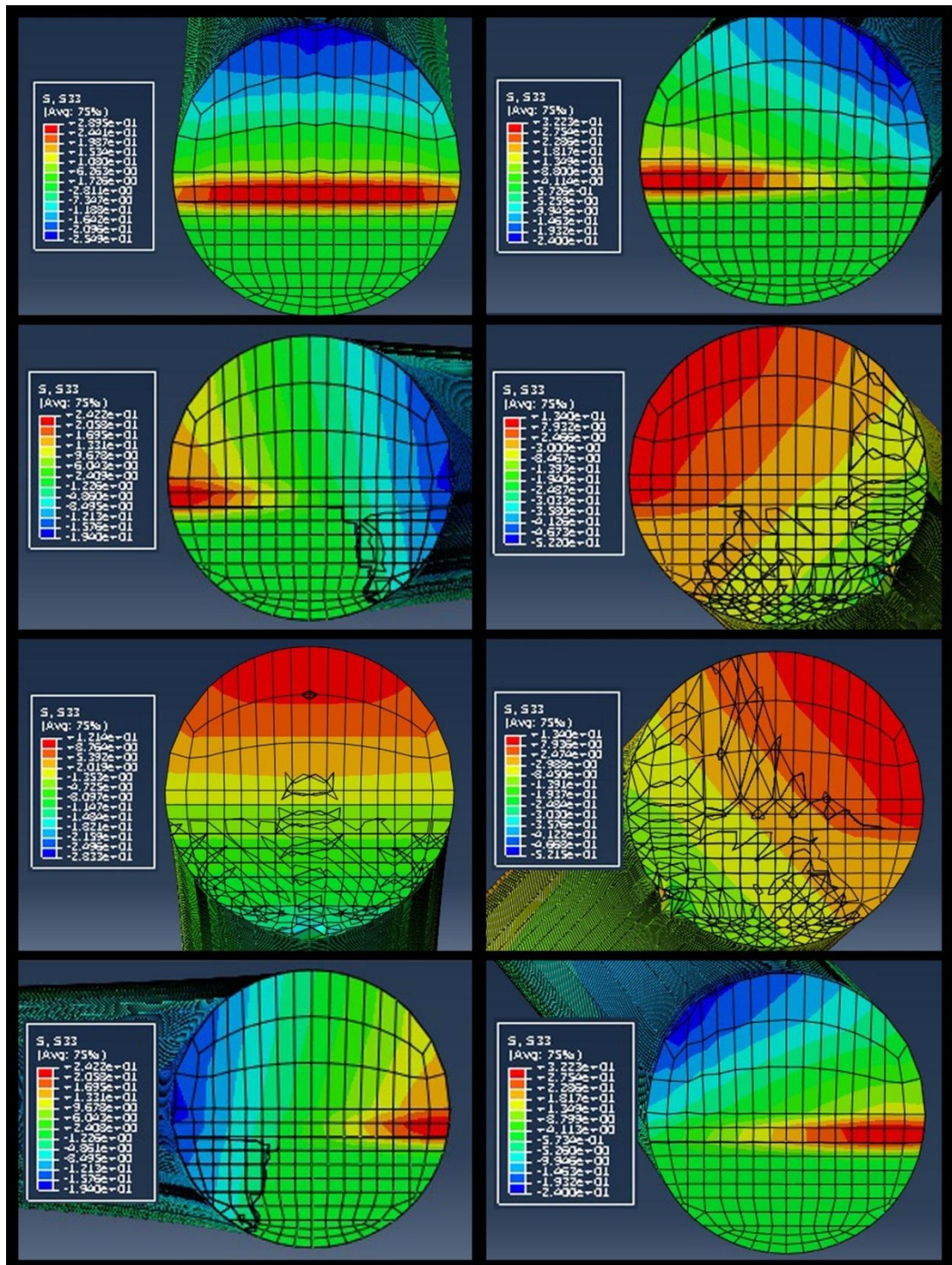


Figura 4.8 tensiones en el eje z (tracción: rojo y compresión: azul)

En las visualizaciones de ambos casos ocurre lo mismo que en el apartado anterior 4.2. Se puede apreciar de nuevo el ciclo de apertura y cierre de la fisura (figura 4.7) en función de su posición angular. La única diferencia consiste en que el tamaño de fisura es ligeramente menor.

Observando las tensiones (figura 4.8) se observa la simetría de colores y áreas y la zona verde que se mantiene a tensión nula cuando la fisura esta en posición abierta.

4.4 Caso 3: Tamaño de fisura $\alpha=0,3$

En este apartado se muestran los resultados correspondientes a la apertura y cierre de la fisura mediante el output COPEN (figura 4.9) y los resultados correspondientes a tensiones en el eje Z mediante el output S33 (figura 4.10) para una fisura de tamaño $\alpha = 0,3$ con sus diferentes posiciones angulares.

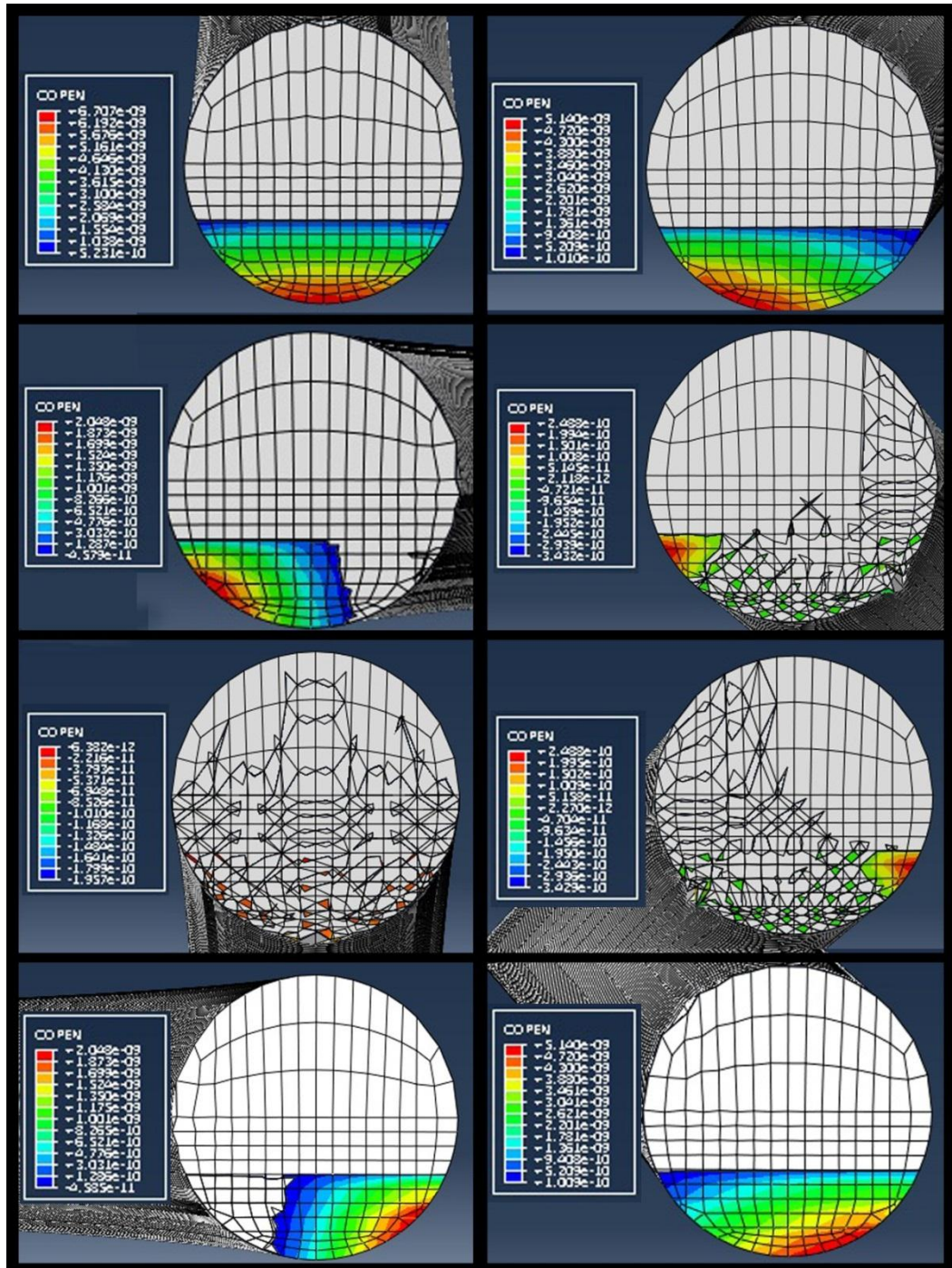


Figura 4.9 distancia entre nodos de ambas caras de la fisura

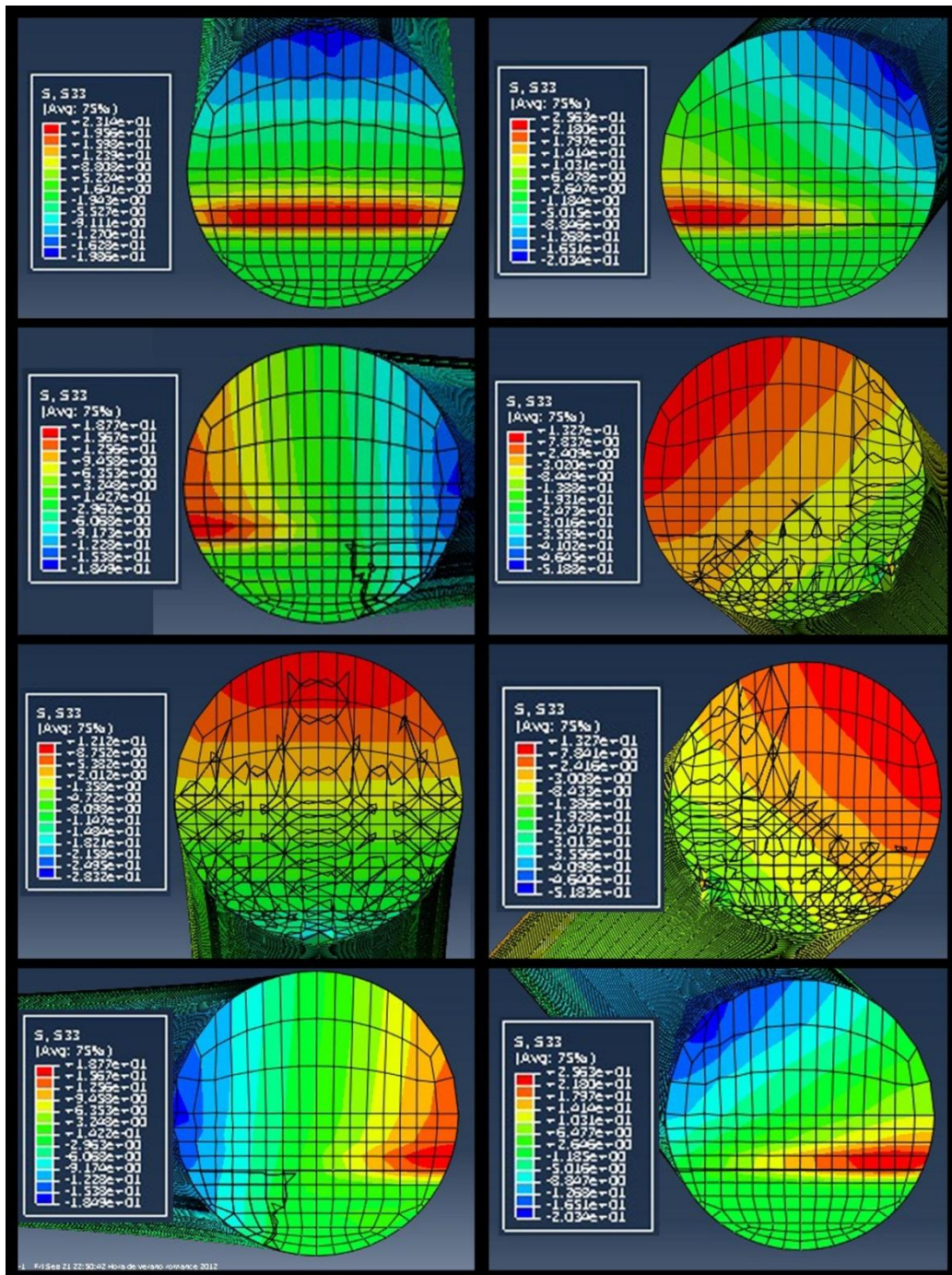


Figura 4.10 tensiones en el eje z (tracción: rojo y compresión: azul)

Si comparamos de forma breve los valores de las tensiones tanto a compresión como a tracción que se han presentado hasta ahora (figuras 4.6, 4.8 y 4.10), se observa que a medida que disminuimos el tamaño de la fisura, las tensiones decrecen. Esto es muy lógico, ya que vamos aumentando la rigidez del eje.

4.5 Caso 4: Tamaño de fisura $\alpha=0,2$

En este apartado se muestran los resultados correspondientes a la apertura y cierre de la fisura mediante el output COPEN (figura 4.11) y los resultados correspondientes a tensiones en el eje Z mediante el output S33 (figura 4.12) para una fisura de tamaño $\alpha = 0,2$ con sus diferentes posiciones angulares.

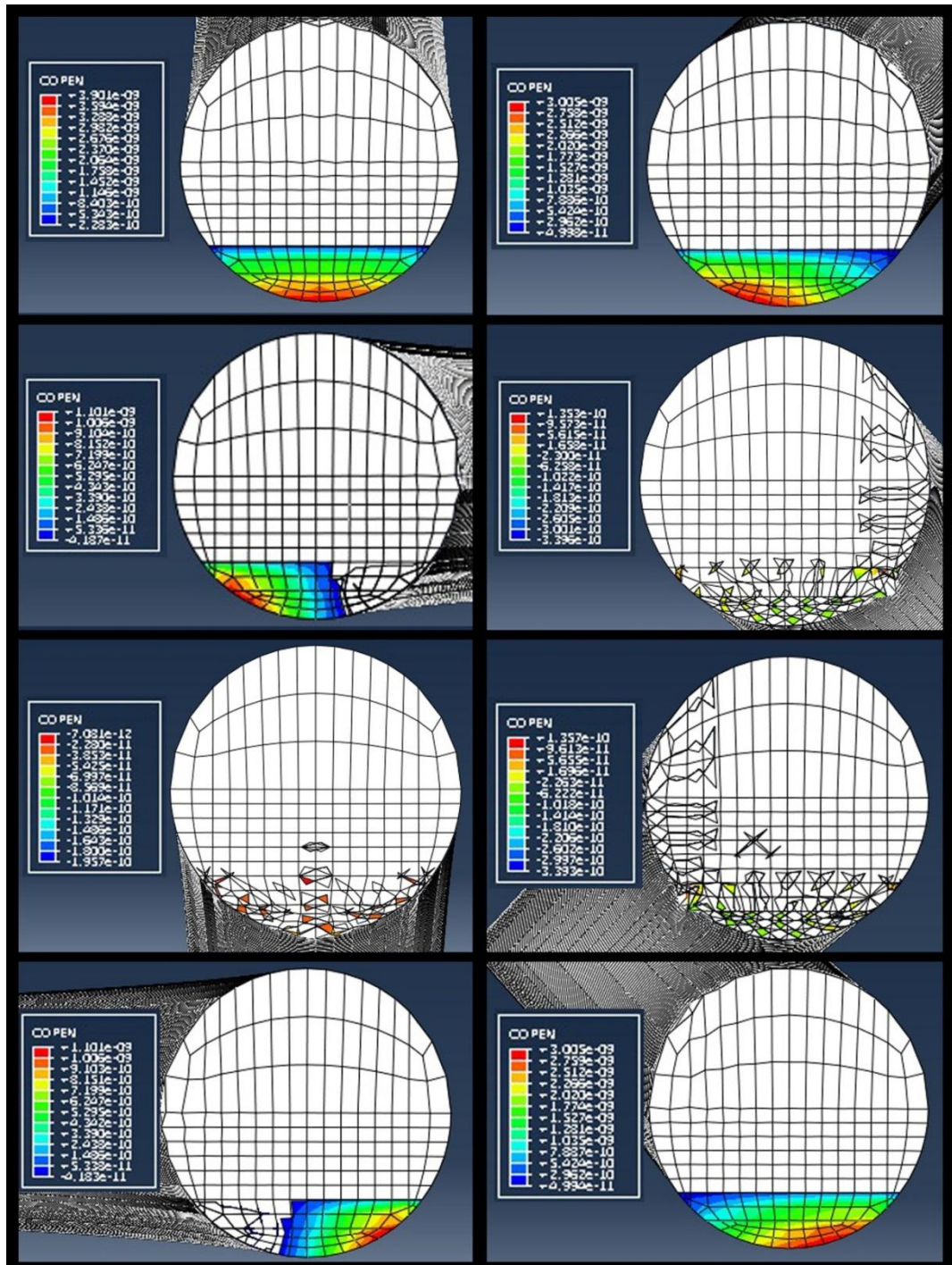


Figura 4.11 distancia entre nodos de ambas caras de la fisura

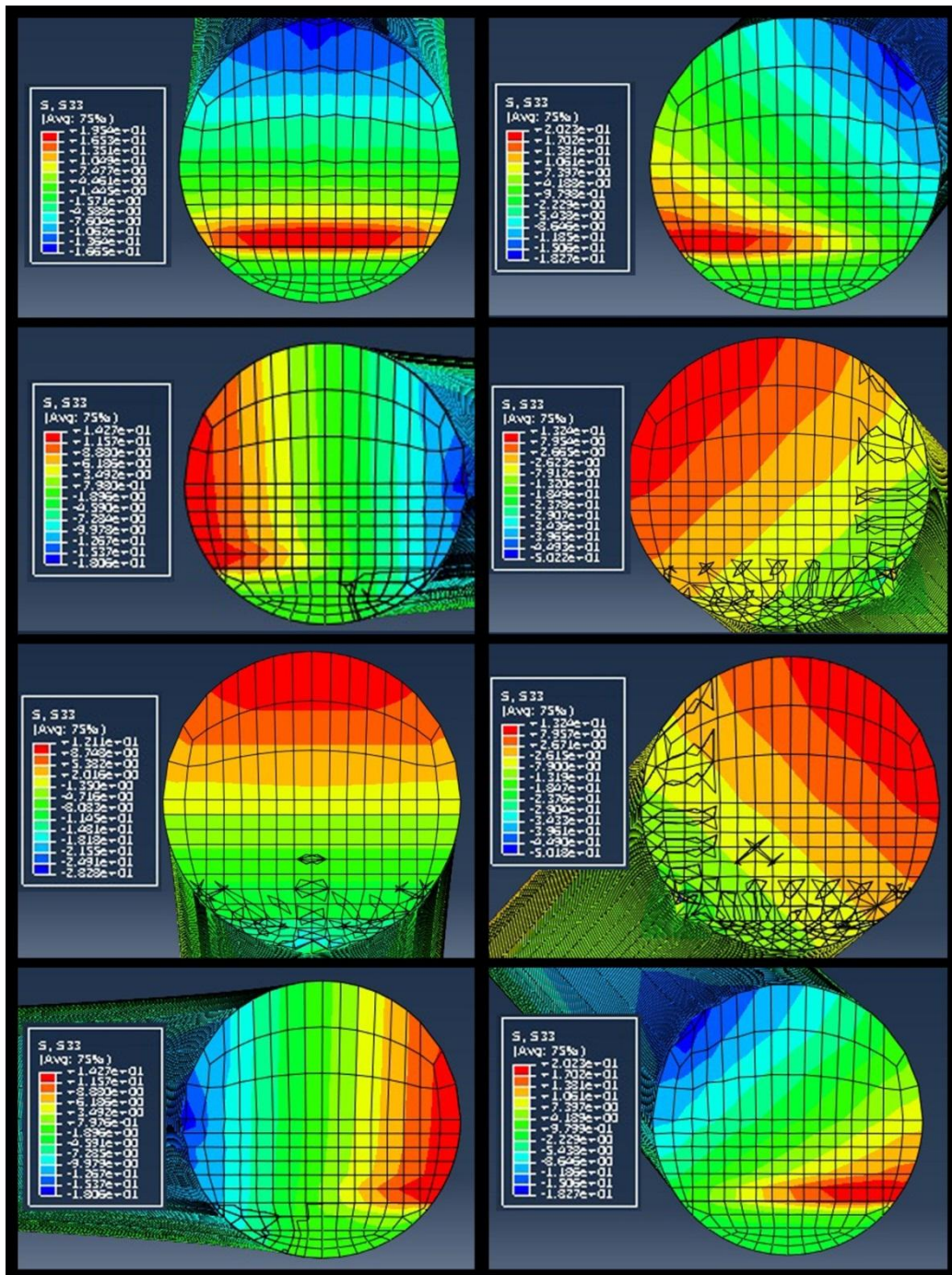


Figura 4.12 tensiones en el eje z (tracción: rojo y compresión: azul)

Mediante la visualización de la figura 4.11, se puede apreciar cómo la rigidez del material aumenta en relación a los anteriores tamaños de fisura, ya que para las posiciones 4,5 y 6 la sección de la fisura esta prácticamente cerrada.

Se continúa observando en la figura 4.12 la zona libre de carga de la fisura en color verde.

4.6 Caso 5: Tamaño de fisura $\alpha=0,1$

En este apartado se muestran los resultados correspondientes a la apertura y cierre de la fisura mediante el output COPEN (figura 4.13) y los resultados correspondientes a tensiones en el eje Z mediante el output S33 (figura 4.14) para una fisura de tamaño $\alpha = 0,1$ con sus diferentes posiciones angulares.

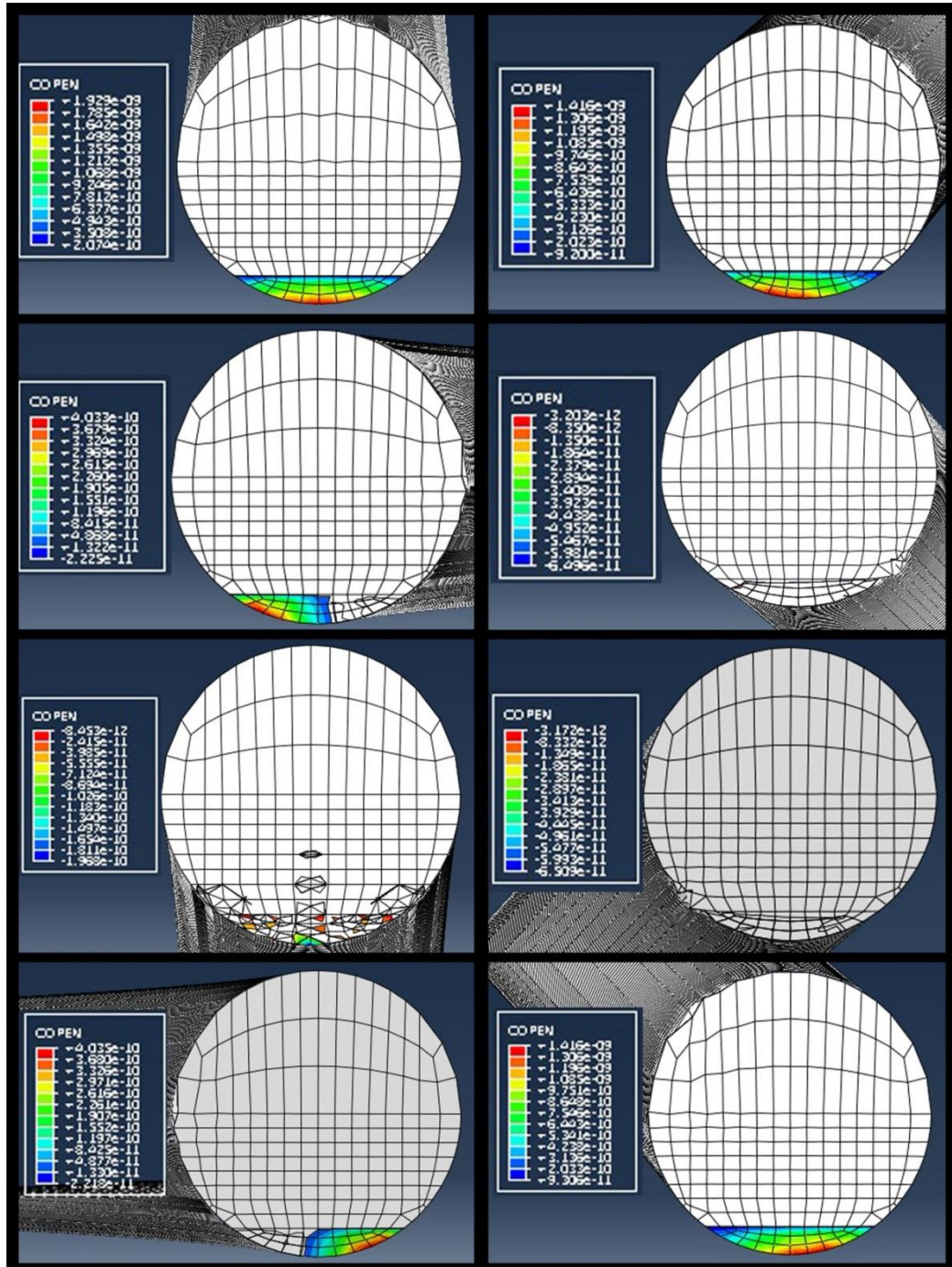


Figura 4.13 distancia entre nodos de ambas caras de la fisura

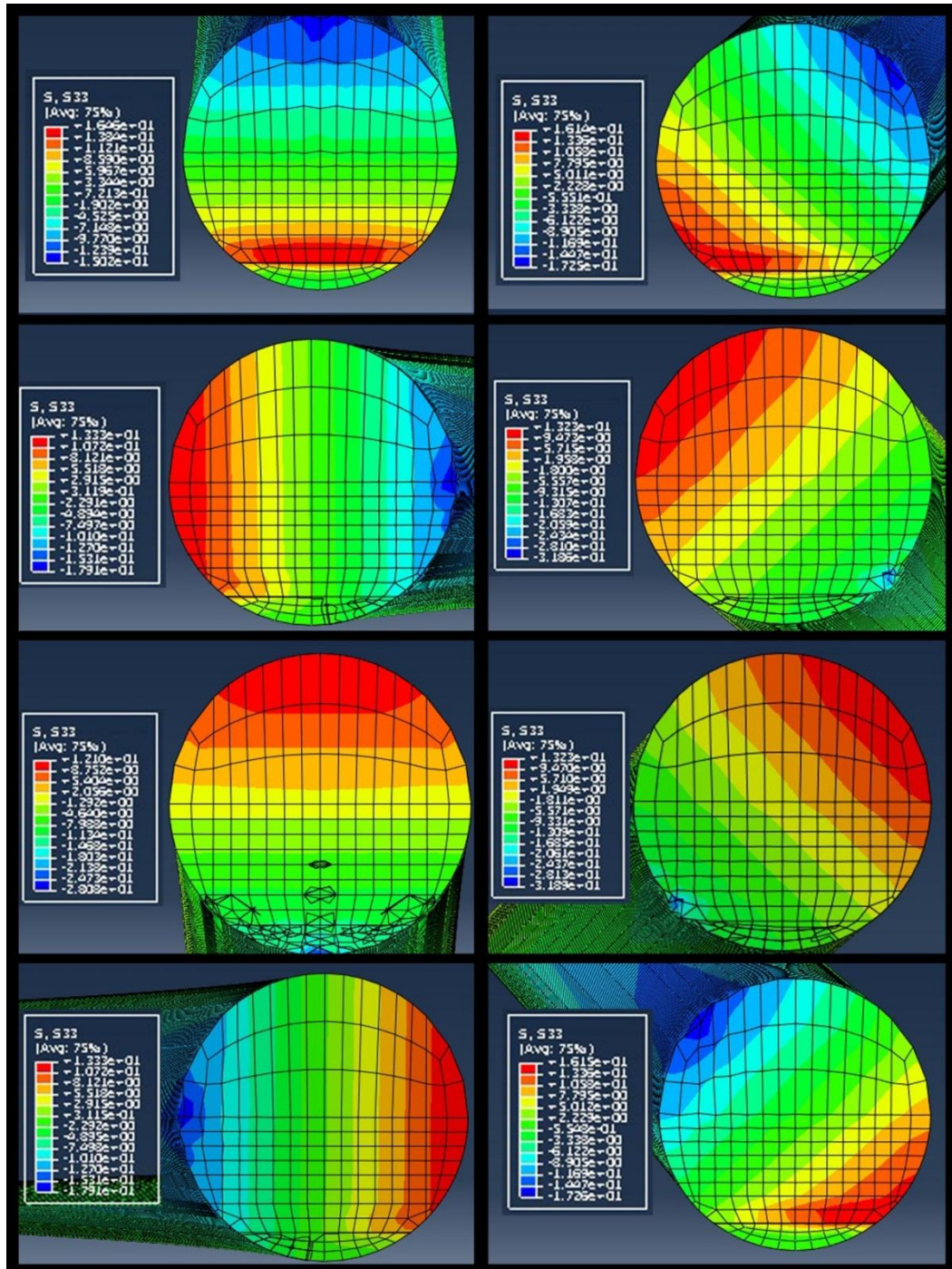


Figura 4.14 tensiones en el eje z (tracción: rojo y compresión: azul)

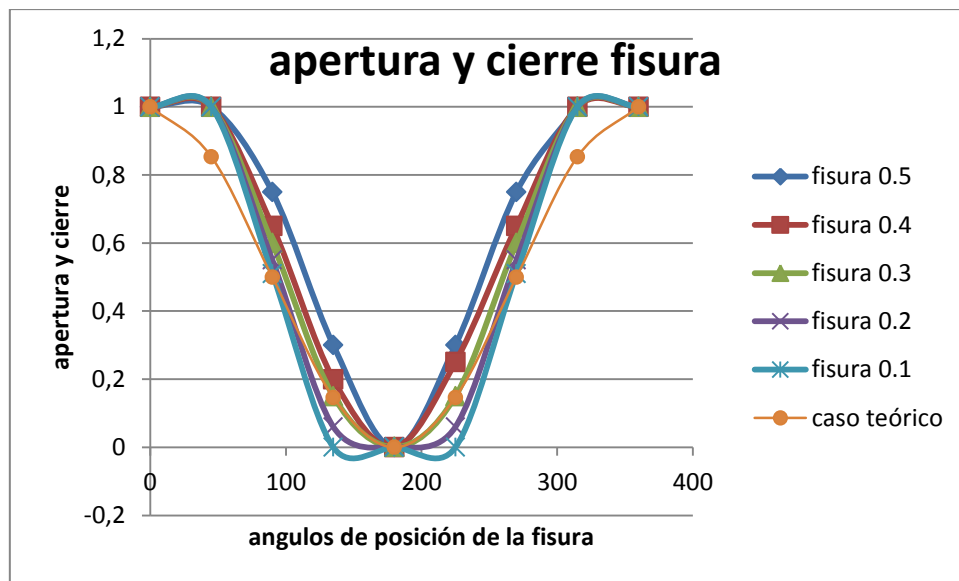
Este es el último de los casos a estudiar y, como se ha citado en el apartado anterior, al ser el tamaño de fisura menor de todos, es el caso de mayor rigidez y por tanto, el que menos tensiones soporta. Ver figura 4.14.

4.7 Comparación de resultados

Para la comparación de todos los datos obtenidos mediante el output COPEN, se ha realizado una grafica que relaciona la teoría de Mayes y Davies (ver grafica 2.3) con los datos obtenidos.

En la gráfica 4.1 se muestra en el eje de las abscisas las diferentes posiciones angulares de la fisura tomadas en grados cada 45° en sentido horario, mientras que en el eje de las ordenadas se ha organizado la apertura de la fisura en tanto por 1, donde el valor 1 corresponde a una fisura completamente abierta mientras que el 0 corresponde a una fisura completamente cerrada.

Para la obtención de los valores de apertura y cierre de la fisura (eje de ordenadas) se ha optado por realizar una medición del área abierta y se ha realizado un baremo para organizarlos en tanto por uno sobre el total del área.



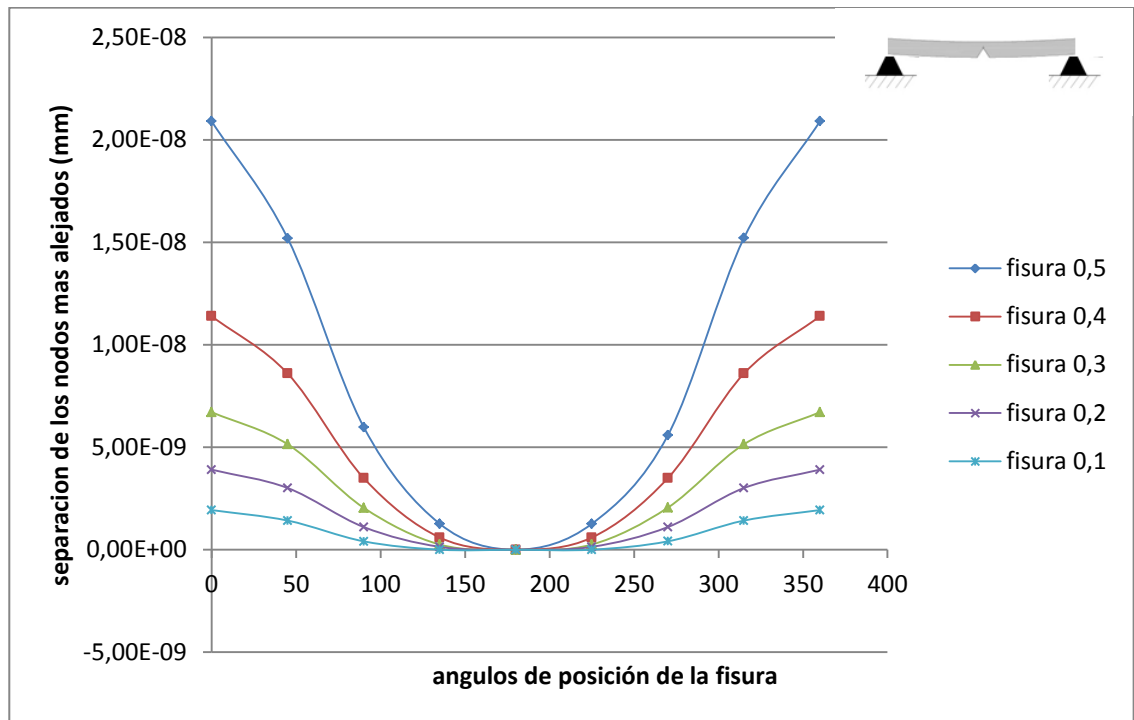
Gráfica 4.1 relación teórico-experimental de la apertura y cierre de la fisura

Observando la grafica 4.1 se puede afirmar que la curva correspondiente al tamaño de fisura $\alpha = 0,5$ es la curva que mas se asemeja al caso teórico propuesto por Mayes y Davies⁹.

Se afirma también que a medida que vamos reduciendo el tamaño de fisura, el área que se mantiene abierta es menor y por lo tanto, las tensiones que soporta la sección se ven reducidas, debido a que vamos aumentando la rigidez de nuestro eje.

Capítulo 4: Análisis de resultados

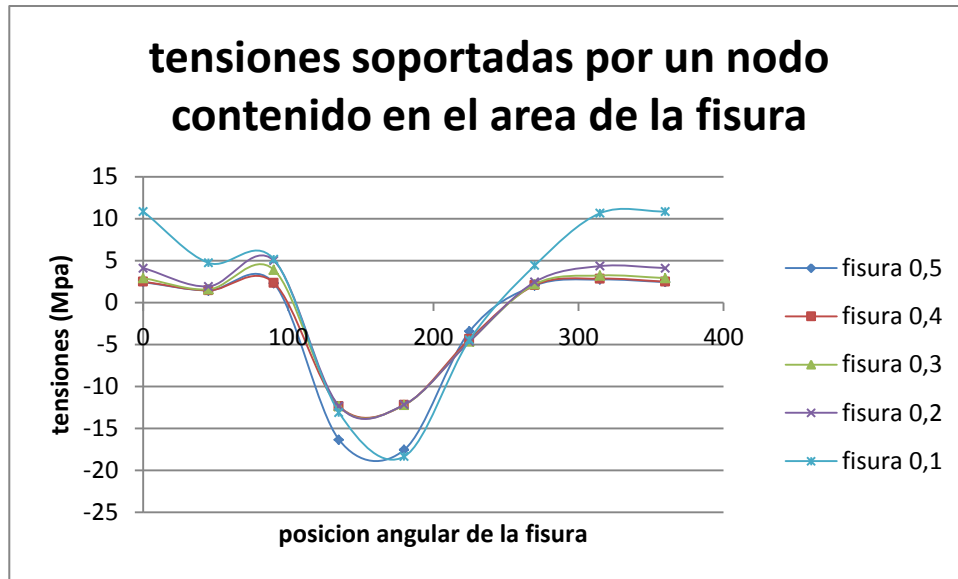
En la siguiente gráfica 4.2 se compara la distancia máxima entre los nodos mas alejados para cada tamaño de fisura y posición angular de la fisura.



Gráfica 4.2 separación máxima entre los nodos mas alejados de la fisura

Mediante esta gráfica se puede estudiar cómo influye el tamaño de fisura. Cuanto mayor es el tamaño de fisura, mas elevados serán los desplazamientos entre nodos.

Para el estudio de la tracción y compresión que soporta el eje para cada caso propuesto se elegirá un nodo que este contenido en el área de la fisura. En este nodo se tomarán los valores de tensión para cada instante de tiempo y ver como evoluciona como se aprecia en la gráfica 4.3.



Gráfica 4.3 tensiones que aparecen en un nodo contenido en el área de la fisura.

El punto elegido para la toma de datos debe estar contenido en la fisura para cualquiera de los tamaños de ésta, para poder llevar a cabo una buena comparación de los resultados.

Por lo tanto, el punto óptimo se ha considerado en la parte inferior de la sección de nuestro eje, a 9 mm de distancia con respecto a la directriz del eje.

Se puede ver como todas las curvas tienen cierta similitud de forma, pero si se observa más detenidamente la curva correspondiente al tamaño de fisura de 0,1, presenta picos más altos de tensión. Esto es debido a que el punto elegido está muy cerca del frente de fisura, donde se acumulan todas las tensiones.

Los valores de compresión en valor absoluto son mayores a los de tracción. Los valores de tracción se obtienen en los casos en los que la fisura está abierta. Esto es debido a que el frente de la fisura acumula todas las tensiones. En cambio, cuando la fisura está cerrada, esta actúa como si no hubiese fisura (eje continuo), estando sometida así a esfuerzos de compresión.

Los valores de tracción deberían ser 0 en las caras abiertas de la fisura. Esto puede ser evitado realizando un mallado mucho más refinado.

Capitulo 5:

Conclusiones y trabajos futuros

5.1 Conclusiones

Se ha realizado un modelo de elementos finitos de un eje fisurado con diferente orientación angular de la fisura para estudiar cómo se comporta el eje en cada instante de tiempo y completar así un giro completo del eje.

Se ha analizado la apertura de la fisura para todas y cada una de las distintas posiciones angulares y diferentes tamaños de las mismas.

Se ha realizado un estudio sobre el estado de tensiones para verificar los datos obtenidos.

Se han comparado los resultados de apertura obtenidos con el modelo teórico de Mayes y Davies. Obteniéndose una buena concordancia entre estos.

5.2 Trabajos futuros

En este apartado se enunciarán brevemente los estudios o proyectos que se pueden realizar apoyándose en el presente proyecto.

Uno de los trabajos que se podrían realizar sería el análisis para fisuras de frente elíptico.

Otro trabajo que se podría hacer sería realizar un análisis en condiciones dinámicas del eje fisurado tanto para fisuras de frente recto como elíptico.

Este proyecto podría servir de modelo de base para un estudio experimental del eje.

A la vista de lo comentado en el punto 4.7, se sugiere otro posible trabajo futuro que consistirá en la realización de un cálculo más exhaustivo del estado tensional del eje fisurado.

Capitulo 6:

Presupuesto y bibliografía

6.1 Presupuesto

El proyecto comenzó a día 20 de junio de 2012 y finalizó el 20 de octubre de 2012. A continuación en la tabla 6.1 se expondrán las tareas realizadas y el tiempo empleado para cada una de ellas para poder estimar un total de hora empleadas en la realización del proyecto.

Tarea	Fecha de inicio	Fecha de fin	h/día	días
1. Propuesta	20/06/2012	20/06/2012	1	1
2. Inicio del proyecto	25/06/2012	25/06/2012	0,5	1
3. Planificación del proyecto	26/06/2012	26/06/2012	2	1
4. Ejecución del proyecto	27/06/2012	8/10/2012		
4.1.ABAQUS 6.10	28/06/2012	24/09/2012		
4.1.1. Aprendizaje del programa	28/06/2012	16/07/2012	2	12
4.1.2. Simulación de los casos	17/07/2012	31/08/2012	5	34
4.1.3. Exportar datos a Excel	03/09/2012	14/09/2012	6	9
4.1.4. Representación grafica de datos obtenidos	17/09/2012	24/09/2012	3	5
4.1.5. Comparación de datos	25/09/2012	08/10/2012	4	10
5. Redacción de la memoria	19/09/2012	19/10/2012	3,6	22
horas totales				386,5

Tabla 6.1 horas de trabajo dedicadas al proyecto

Las horas aproximadas de trabajo han sido un total de 386 horas.

El presupuesto que se procede a presentar a continuación, se tiene que dividir o diferenciar en dos partes: el tiempo que se ha invertido en el empleo de recursos humanos y el tiempo de utilización de los equipos y aplicaciones necesarias (con sus respectivas licencias) para la realización del Proyecto.

Así pues, se estima el tutor del Proyecto ha dedicado alrededor de 1 mes en la supervisión del trabajo realizado por el proyectista, que ha dedicado 4 meses en la elaboración total del Proyecto.

En lo referente a los equipos utilizados, únicamente ha sido el ordenador personal del proyectista. El ordenador personal se ha utilizado en la totalidad de la realización del proyecto.

Las aplicaciones que se han empleado en la realización del Proyecto son el programa ABAQUS y los programas Word y Excel de MICROSOFT OFFICE.

Analizados estos tres puntos, el presupuesto del Proyecto que se presenta es el que a continuación se detalla, siendo el total de 27.766 euros.



UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

Escuela Politécnica Superior

PRESUPUESTO DE PROYECTO

1.- Autor: Miguel Dominguez Quintas

2.- Departamento: Ingeniería Mecánica

3.- Descripción del Proyecto:

- Título ESTUDIO NUMÉRICO DEL COMPORTAMIENTO DE UNA FISURA DE FRENTE RECTO CONTENIDA EN UN EJE DE GIRATORIO
 - Duración (meses) 4
 Tasa de costes Indirectos: 20%

4.- Presupuesto total del Proyecto (valores en Euros):

Euros 27.766

5.- Desglose presupuestario (costes directos)

PERSONAL

Apellidos y nombre	N.I.F. (no rellenar - solo a título informativo)	Categoría	Dedicación (hombres mes) ^{a)}	Coste hombre mes	Coste (Euro)
Rubio Ruiz de Aguirre, M ^a Lourdes		ingeniero	1	4.289,54	4.289,54
Dominguez Quintas, Miguel		Ingeniero Técnico	4	2.694,39	17.158,16
Hombres mes 5				Total	21.447,70

^{a)} 1 Hombre mes = 131,25 horas. Máximo anual de dedicación de 12 hombres mes (1575 horas)
 Máximo anual para PDI de la Universidad Carlos III de Madrid de 8,8 hombres mes (1.155 horas)

EQUIPOS

Descripción	Coste (Euro)	% Uso dedicado proyecto	Dedicación (meses)	Periodo de depreciación	Coste imputable ^{d)}
Ordenador Personal	1.000,00	100		60	0,00
Programa Abaqus	33.650,00	100	3	60	1.682,50
Programa Microsoft office proffesional	499,00	100	1	60	8,32
				Total	1.690,82

^{d)} Fórmula de cálculo de la Amortización:

$$\frac{A}{B} \times C \times D$$

A = nº de meses desde la fecha de facturación en que el equipo es utilizado

B = periodo de depreciación (60 meses)

C = coste del equipo (sin IVA)

D = % del uso que se dedica al proyecto (habitualmente 100%)

6.- Resumen de costes

Presupuesto Costes Totales	Presupuesto Costes Totales
Personal	21.448
Amortización	1.691
Costes Indirectos	4.628
Total	27.766

6.2 Bibliografía

¹ Albert, W. A. J. (1838) "Über Treibseile am Harz" *Archive für Mineralogie Geognosie Bergbau und Hüttenkunde*, vol. 10, pp 215-34.

² Poncelet. (1826). Cours de mécanique appliquée aux machines.

³ W J M RANKINE(1843). on the causes of the unexpected breakage of the journals of railway axles; and on the means of preventing such accidents by observing the law of continuity in their construction, pp 105 –107

⁴ Wohler A. (1871), Test to determine the forces acting on railway carriage axes, *Engineering* 11, pp 199

⁵ Gerber W. (1874), bestimmung der zulossigen spannungen in eisen contructionen. Ing

⁶ Goodman J. y Soderberg (1930) *Mechanics applied to enginnering* Vol 1.

⁷ HUMPHREYS, F. J.(1988) *Mechanical and Physical Behavior of Metallic and Ceramic Composites*, (Eds. Anderson, S. I. et al.). Riso Natn. Lab. Dinamarca.: 51-74.

⁸ Gasch R.(1993) "A survey of the dynamic behavior of a simple rotating shaft with a transverse crack" Vol 160 n° 2 pp 313-332.

⁹ Mayes I.W. Davies (1984). Analysis of the response of a Multi-Rotor-Bearing System Containing a Transverse Crack in a Rotor. Vol 106 pp 139-145.

¹⁰ PFC Alvaro Melendo (2011) Estudio de la interacción fisura-desequilibrio en la evolución de las órbitas de ejes rotativos pp 18-21.

¹¹ Abaqus User's Manual 6.10.(2011) Hibbit Karlsson & sorensen.

¹² PFC Mercedes Novella (2012) Análisis del factor de intensidad de tensiones en un eje con una fisura de frente recto. Pp 20- 68.